المتجهات في الفضاء

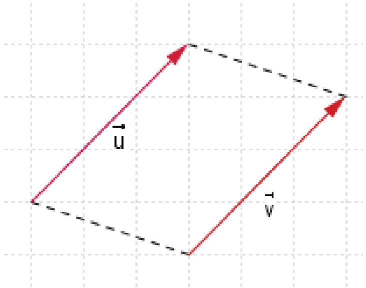
I)- تساوي متجهتين – جمع المتجهات

1- عناصر متجهة

A و B نقطتين مختلفتين من الفضاء، إذا رمزنا للمتجهة $\overrightarrow{AB}$ بالرمز $\vec{u}$ فان :

- اتجاه $\vec{u}$ هو اتجاه المستقيم (AB)
- منحى $\vec{u}$ هو المنحى من A إلى B
- منظم $\vec{u}$ هي المسافة AB و نكتب: $AB = \|\vec{u}\|$

ملحوظة: لكل نقطة A من الفضاء المتجهة $\overrightarrow{AA}$ ليس لها اتجاه و منظمها منعدم.
$\overrightarrow{AA}$ تسمى المتجهة المنعدمة و نكتب $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

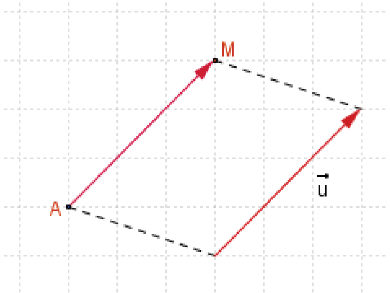


$\vec{u} = \vec{v}$

2- تساوي متجهتين

تعريف

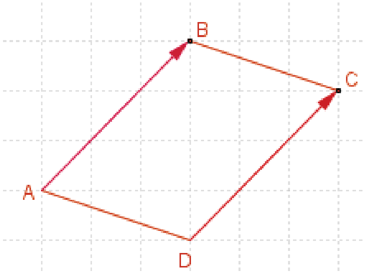
تكون متجهتان متساويتان اذا كان لهما نفس الاتجاه و نفس المنحى و نفس المنظم



لكل متجهة $\vec{u}$ من الفضاء و لكل نقطة A في الفضاء
توجد نقطة وحيدة M حيث $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$

خاصية

$ABCD$ رباعيا في الفضاء
$ABCD$ متوازي الأضلاع إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

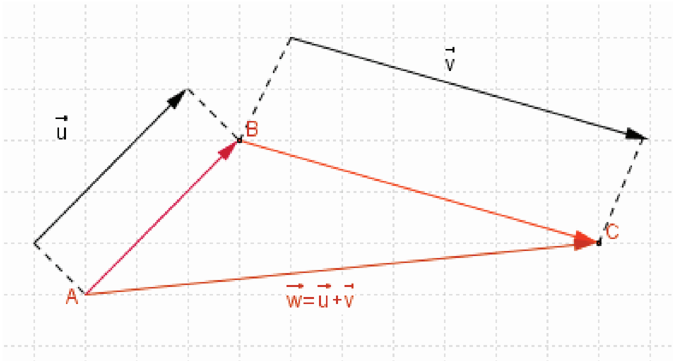


خاصية

لتكن A و B و C و D أربع نقط من الفضاء
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ (تبديل الوسطين)
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CA}$ (تبديل الطرفين)

3- مجموع متجهتين –علاقة شال

أ- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين في الفضاء
لتكن A نقطة من الفضاء،
توجد نقطة وحيدة B حيث $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.
توجد نقطة وحيدة C حيث $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$.
النقطتان A و C تحددان متجهة
وحيدة $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$



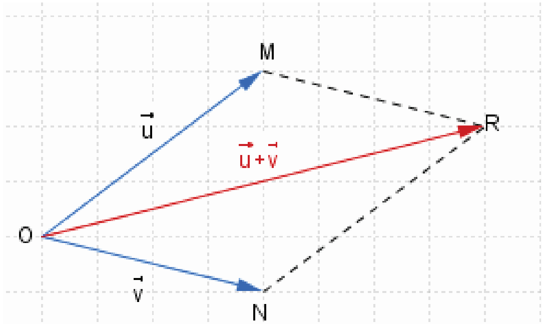
المتجهة $\vec{w}$ هي مجموع المتجهتين
$\vec{u}$ و $\vec{v}$
نكتب $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

ب- علاقة شال

مهما كانت النقط A و B و C من الفضاء
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

نتيجة

لتكن O و M و N و R أربع نقط من الفضاء
$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OR}$ إذا وفقط إذا كان $OMRN$ متوازي الأضلاع



ملاحظة: اذا كانت $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$ فان
$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OR}$ حيث $OMRN$ متوازي الأضلاع

ج- خاصيات

*- لكل متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ $\quad \vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

*- لكل ثلاث متجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ $\quad (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

*- لكل متجهة $\vec{u}$ $\quad \vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$

مقابل متجهة - فرق متجهتين

أ- مقابل متجهة

لتكن $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة في الفضاء
مقابل المتجهة $\vec{u}$ هي المتجهة التي لها نفس الاتجاه و نفس المنظم و منحاها مضاد لمنحى المتجهة $\vec{u}$ نرمز لها بالرمز $-\vec{u}$

*- لكل متجهة $\vec{u}$: $\quad \vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}$

* لكل نقطتين A و B من المستوى لدينا $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

المتجهتان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ متقابلتان نكتب $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

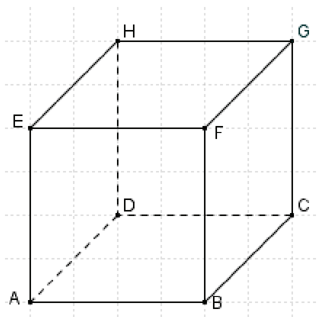
ب- فرق متجهتين

تعريف

لكل متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ $\quad \vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$

ملاحظة لكل ثلاث نقط A و B و C $\quad \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

أمثلة



$ABCDEFGH$ مكعب

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{HG}$ $\qquad \overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{HE}$ $\qquad \overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EC}$

4- منتصف قطعة

I منتصف $[AB]$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$ $\quad (\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0})$

II) الاستقامية– التعريف المتجهي للمستقيم

1- ضرب متجهة في عدد حقيقي

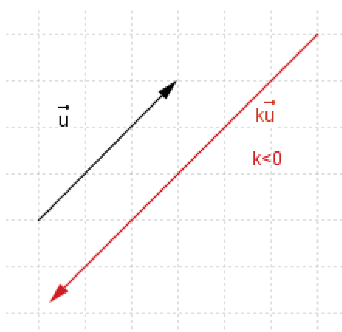
تعريف

$\vec{u}$ متجهة غير منعدمة و k عدد حقيقي غير منعدم
جداء المتجهة $\vec{u}$ في العدد الحقيقي k هي المتجهة $k\vec{u}$ حيث :

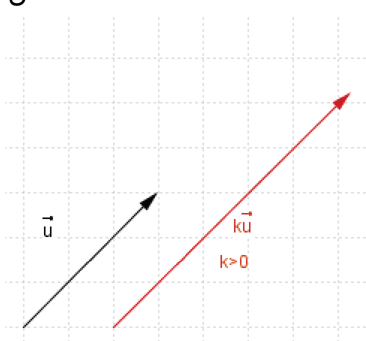
* $\vec{u}$ و $k\vec{u}$ لهما نفس الاتجاه

* $\|k\vec{u}\|=|k|\times\|\vec{u}\|$

* منحى $k\vec{u}$ هو
  - منحى $\vec{u}$ إذا كان $k \succ 0$
  - عكس منحى $\vec{u}$ إذا كان $k \prec 0$



$k \prec 0$



$k \succ 0$

* لكل متجهة $\vec{u}$ و لكل عدد حقيقي k : $\quad 0\cdot\vec{u}=\vec{0}$ و $k\cdot\vec{0}=\vec{0}$

2 - خاصيات

مهما تكن المتجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و مهما يكن العددان الحقيقيان α و β فان

$\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$ $\qquad \beta$ $\qquad (\alpha+\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}+\quad\vec{v}$

$1\cdot\vec{u}=\vec{u}$ $\qquad \beta$ $\qquad (\alpha\beta)\vec{u}=\alpha(\quad\vec{u})$

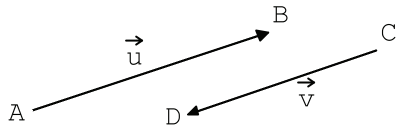
$\alpha\vec{u}=\vec{0}$ إذا وفقط إذا كان $\alpha=0$ أو $\vec{u}=\vec{0}$

3- الاستقامية

استقامية متجهتين

أ- تعريف

تكون متجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين إذا و فقط كانت احداهما جداء الأخرى في عدد حقيقي



ملاحظة

$\vec{0}$ مستقيمية مع أية متجهة

استقامية ثلاث نقط

تعريف

لتكن A و B و C نقطا من الفضاء حيث $A \neq B$

تكون النقط A و B و C مستقيمية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي α حيث $\overrightarrow{AC} = \alpha \overrightarrow{AB}$

توازي مستقيمين

لتكن A و B و C و D نقطا من الفضاء حيث $A \neq B$ و $C \neq D$

$(AB)//(CD)$ إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مستقيميتين

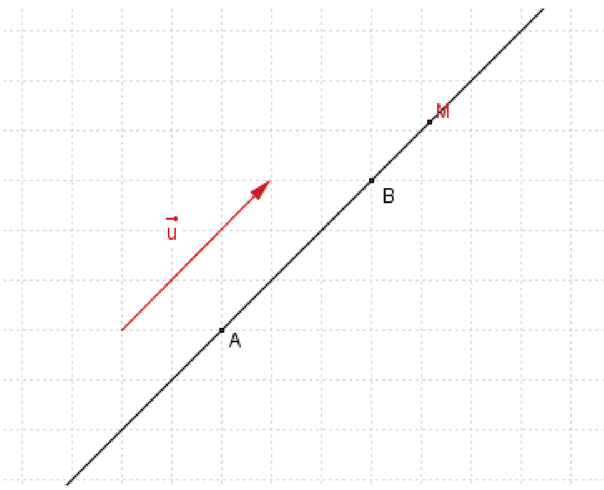
التعريف المتجهي لمستقيم في الفضاء

تعريف

لتكن A و B نقطتين مختلفتين من الفضاء

كل متجهة $\vec{u}$ غير منعدمة و مستقيمية مع المتجهة $\overrightarrow{AB}$

تسمى متجهة موجهة للمستقيم (AB)



خاصية

لتكن A نقطة من الفضاء و $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة

مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u}$ و $\alpha \in \mathbb{R}$

هي المستقيم المار من A و الموجه بـ $\vec{u}$. نرمز له بالرمز $D(A;\vec{u})$

$$D(A;\vec{u}) = \left\{ M \in (E) / \overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u} \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

تمرين

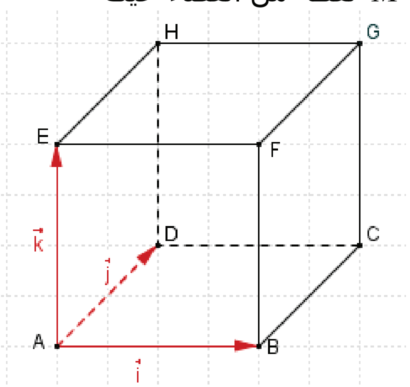
ليكن $ABCDEFGH$ مكعبا نضع $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$ و $\overrightarrow{AD} = \vec{j}$

و $\overrightarrow{AE} = \vec{k}$ و $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$. نعتبر I منتصف $[HG]$

1- بين أن $\vec{u}$ موجهة للمستقيم (AI)

2- ليكن المستقيم (Δ) المار من G و الموازي للمستقيم (AI) و M نقطة من الفضاء حيث

$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BG}$. بين أن $M \in (\Delta)$



الجواب

1- نبين أن $\vec{u}$ موجهة للمستقيم (AI)

أي نبين أن $\overrightarrow{AI}$ و $\vec{u}$ مستقيميتين

لدينا I منتصف $[HG]$ ومنه $\overrightarrow{HI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HG}$

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HI} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HG}$$

بما أن $ABCDEFGH$ مكعب فان $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD} = \vec{j}$ و $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AB} = \vec{i}$

ومنه $\overrightarrow{AI} = \vec{k} + \vec{j} + \frac{1}{2}\vec{i} = \frac{1}{2}\left(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\right) = \frac{1}{2}\vec{u}$

إذن $\overrightarrow{AI}$ و $\vec{u}$ مستقيميتان و منه $\vec{u}$ موجهة للمستقيم (AI)

2 نبين أن $M \in (\Delta)$

لدينا (Δ) المار من G و الموازي للمستقيم (AI) أي $(\Delta) = D(G;\vec{u})$

$$\overrightarrow{GM}=\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{CG}$$

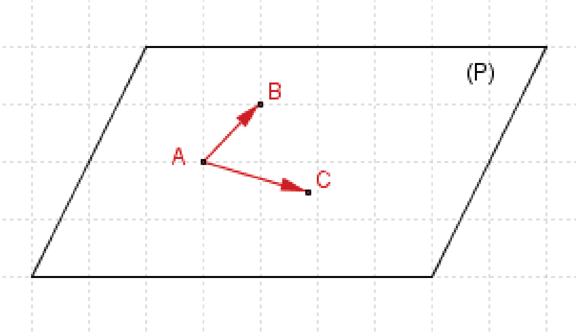
بما أن $ABCDEFGH$ مكعب فان $\overrightarrow{GF}=-\overrightarrow{AD}=-\vec{j}$ و $\overrightarrow{FB}=-\overrightarrow{AE}=-\vec{k}$ و $\overrightarrow{CG}=\vec{k}$ و $\overrightarrow{BC}=\vec{j}$

$$\overrightarrow{GM}=-\vec{j}-\vec{k}+\frac{1}{2}i+2\vec{j}+2\vec{k}=\frac{1}{2}\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}=\frac{1}{2}\left(\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}\right)=\frac{1}{2}\vec{u}$$

و بالتالي $M\in D(G;\vec{u})$ إذن $M\in(\Delta)$

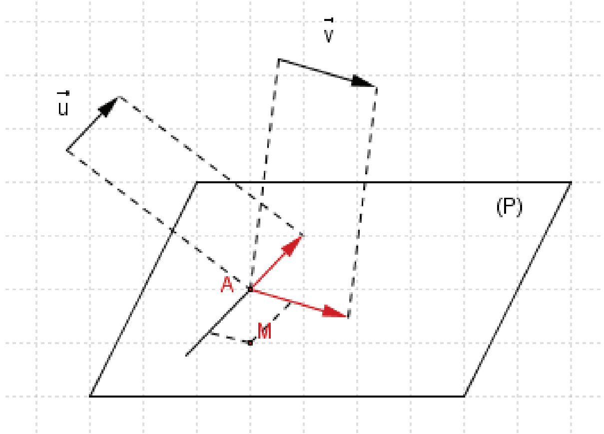
III) الاستوائية– التعريف المتجهي للمستوى

1- تعريف



ليكن (P) مستوى من الفضاء و A و B و C نقط غير مستقيمية من المستوى (P)
نقول إن (P) هو المستوى المار من A و الموجه بالمتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

نتيجة



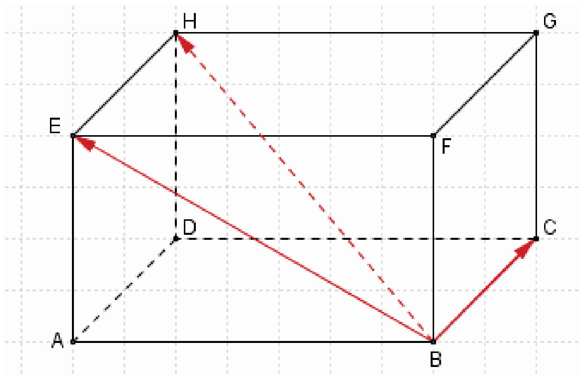
متجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين و نقطة من الفضاء تحدد مستوى وحيدا (P) هو المستوى المار من النقطة A و الموجه بالمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ نرمز له بالرمز $P(A;\vec{u};\vec{v})$.

خاصية

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير مستقيميتين و A نقطة من الفضاء.
مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overrightarrow{AM}=x\vec{u}+y\vec{v}$ و $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ هي المستوى (P) المار من A و الموجه بالمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و نكتب $(P)=P(A;\vec{u};\vec{v})$

2- الاستوائية

تعريف



لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث متجهات في الفضاء
نقول إن المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية اذا وفقط وجدت أربع نقط مستوائية A و B و C و D حيث $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ و $\overrightarrow{AD}=\vec{w}$

أمثلة

$ABCDEFGH$ متوازي المستطيلات
$\overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BH}$ مستوائية لان النقط B
و C و E و H مستوائية $\left[(BC)//(EH)\right]$
$\overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{BH}$ و $\overrightarrow{BD}$ غير مستوائية لأن $BDEH$ رباعي الأوجه

خاصية

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير مستقيميتين و $\vec{w}$ متجهة في الفضاء
المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية إذا وفقط إذا وجد عددين حقيقيين x و y حيث
$\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$

نتيجة

إذا وجد عددين حقيقيين x و y حيث $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ فان A و B و C و M مستوائية

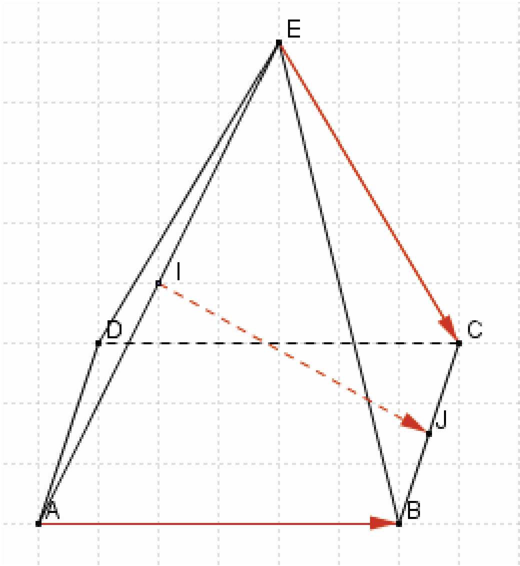
تمرين

$EABCD$ هرم قاعدته المستطيل $ABCD$، I و J منتصفا $[AE]$ و $[BC]$ على التوالي.
بين أن المتجهات $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{EC}$ مستوائية

الحل

$$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}$$

و حيث I و J منتصفا $[AE]$ و $[BC]$ فان :



$\overrightarrow{IA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EA}$ و $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

و بالتالي $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

ومنه $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

ومنه $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

إذن $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{EC}$ مستوائية

تحليلية الفضاء

1- إحداثيات نقطة بالنسبة لمعلم، إحداثيات متجهة بالنسبة لأساس

أ/ الأساس - المعلم في الفضاء

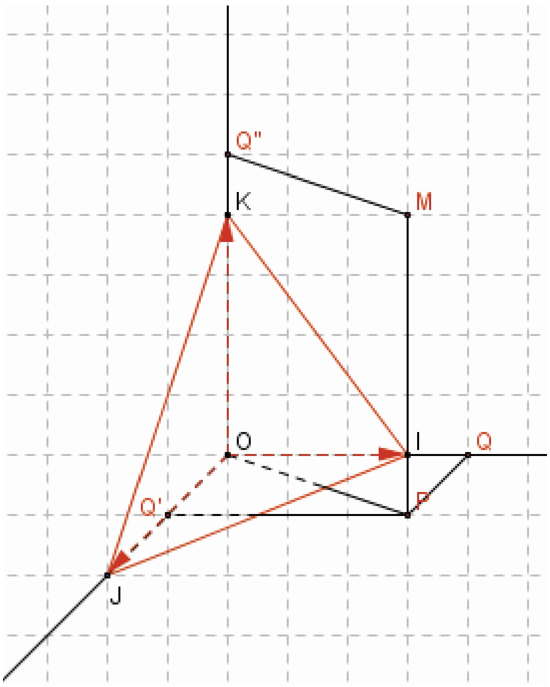
نشاط ليكن $OIJK$ رباعي الأوجه و M نقطة من الفضاء و P مسقطها على المستوى (OIJ) بتواز مع (OK) و Q مسقط P على (OI) بتواز مع (OJ) و Q' مسقط P على (OJ) بتواز مع (OI) و $Q"$ مسقط M على (OK) بتواز مع (OIJ)

1- أنشئ الشكل

2- باعتبار x أفصول Q بالنسبة للمعلم $(O;I)$ و y أفصول Q' بالنسبة للمعلم $(O;J)$ و z أفصول $Q"$ بالنسبة للمعلم $(O;K)$

أكتب $\overrightarrow{OM}$ بدلالة x و y و $\overrightarrow{OI}$ و $\overrightarrow{OJ}$ و $\overrightarrow{OK}$

1- الشكل



2- نكتب $\overrightarrow{OM}$ بدلالة x و y و $\overrightarrow{OI}$ و $\overrightarrow{OJ}$ و $\overrightarrow{OK}$

لدينا Q مسقط P على (OI) بتواز مع (OJ)

و Q' مسقط P على (OJ) بتواز مع (OI)

ومنه $(OQPQ')$ متوازي الأضلاع و بالتالي $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OQ'}$

و حيث x أفصول Q بالنسبة للمعلم $(O;I)$

و y أفصول Q' بالنسبة للمعلم $(O;J)$

فان $\overrightarrow{OQ}=x\overrightarrow{OI}$ و $\overrightarrow{OQ'}=y\overrightarrow{OJ}$

ومنه $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OI}+y\overrightarrow{OJ}$

لدينا $Q"$ مسقط M على (OK) بتواز مع (OIJ)

و P مسقطها على المستوى (OIJ) بتواز مع (OK)

ومنه $(OPMQ")$ متوازي الأضلاع ومنه $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ"}$

و حيث أن z أفصول $Q"$ بالنسبة للمعلم $(O;K)$ فان $\overrightarrow{OQ"}=z\overrightarrow{OK}$

إذن $\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OI}+y\overrightarrow{OJ}+z\overrightarrow{OK}$

و بما أن $OIJK$ رباعي الأوجه فان I و J و K و O غير مستوائية

نقول إن المثلوث $(x;y;z)$ إحداثيات M بالنسبة للمعلم $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OK})$ نكتب $M(x;y;z)$

تعريف

إذا كانت $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ ثلاث متجهات غير مستوائية و O نقطة من الفضاء .

نقول إن المثلوث $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ أساس للفضاء، و أن المربوع $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم للفضاء

ملاحظة:

أربع نقط غير مستوائية O و A و B و C تحددا أساسا مثلا $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})$

و معلما للفضاء مثلا $(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})$

خاصية

ليكن $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلما في الفضاء

لكل نقطة M من الفضاء توجد ثلاثة أعداد حقيقية وحيدة x و y و z حيث $\overrightarrow{OM}=x.\vec{i}+y.\vec{j}+z.\vec{k}$

المثلوث $(x;y;z)$ يسمى إحداثيات M بالنسبة للمعلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نكتب $M(x;y;z)$

لكل متجهة $\vec{u}$ من الفضاء توجد ثلاثة أعداد حقيقية وحيدة x و y و z حيث $\vec{u}=x.\vec{i}+y.\vec{j}+z.\vec{k}$

المثلوث $(x;y;z)$ يسمى إحداثيات $\vec{u}$ بالنسبة للأساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نكتب $\vec{u}(x;y;z)$

ب/ إحداثيات $\vec{u}+\vec{v}$ و $\lambda\vec{u}$ و $\overrightarrow{AB}$ و منتصف قطعة

خاصية

لتكن $\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x';y';z')$ متجهتين من الفضاء المنسوب إلى الأساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ و λ عددا حقيقيا

* $\vec{u}=\vec{v}$ إذا وفقط إذا كان $x=x'$ و $y=y'$ و $z=z'$
* $\vec{u}+\vec{v}(x+x';y+y';z+z')$
* $\lambda\vec{u}(\lambda x;\lambda y;\lambda z)$

خاصية

لتكن $A(x_A;y_A;z_A)$ و $B(x_B;y_B;z_B)$ نقطتين من الفضاء المنسوب إلى لمعلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ و I منتصف القطعة $[AB]$

* مثلوث إحداثيات $\overrightarrow{AB}$ هو $(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$
* مثلوث إحداثيات I هو $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$

2- الشرط التحليلي لاستقامية متجهتين

نشاط

لتكن $\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ متجهتين من الفضاء

أ/ بين أنه إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين فان $ab'-a'b=0$ و $bc'-b'c=0$ و $ac'-a'c=0$

ب/ بين أنه إذا كان $ab'-a'b=0$ و $bc'-b'c=0$ و $ac'-a'c=0$ فان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان

مبرهنة

لتكن $\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ متجهتين من الفضاء

* تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين إذا و فقط إذا كان $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}=0$ و $\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}=0$ و $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}=0$
* تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين إذا و فقط إذا كان $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}\neq 0$ أو $\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}\neq 0$ أو $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}\neq 0$

الأعداد الحقيقية $\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$ تسمى المحددات المستخرجة للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

ملاحظة

يمكن أن نحصل على المحددات المستخرجة بالتقنية التالية

$$\begin{pmatrix} \cancel{a} & \cancel{a'} \\ b & b' \\ c & c' \end{pmatrix} \rightarrow d_1=\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & a' \\ \cancel{b} & \cancel{b'} \\ c & c' \end{pmatrix} \rightarrow d_2=\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \\ \cancel{c} & \cancel{c'} \end{pmatrix} \rightarrow d_3=\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$$

3- المتجهات المستوائية

نشاط

لتكن $\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ و $\vec{w}(a'';b'';c'')$ متجهات من الفضاء منسوب إلى أساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

1- نفترض أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية.

أ/ بين أنه يوجد زوج $(x;y)$ من $\mathbb{R}^2$ حيث $\begin{cases} a=x\cdot a'+y\cdot a'' \\ b=x\cdot b'+y\cdot b'' \\ c=x\cdot c'+y\cdot c'' \end{cases}$

ب/ بين أن $a\begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix}=0$

2- أكتب النتيجة العكسية لنتيجة السؤال 1 . لنقبلها

هل المتجهات $\vec{u}(1;2;3)$ و $\vec{v}(2;0;1)$ و $\vec{w}(3;1;3)$ مستوائية.

أ- محددة ثلاث متجهات

تعريف

لتكن $\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ و $\vec{w}(a";b";c")$ متجهات من الفضاء منسوب إلى أساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

العدد $c\begin{vmatrix} a' & a" \\ b' & b" \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a' & a" \\ c' & c" \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} b' & b" \\ c' & c" \end{vmatrix}$ يسمى محددة المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ نرمز له $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$

أو بـ $\begin{vmatrix} a & a' & a" \\ b & b' & b" \\ c & c' & c" \end{vmatrix}$ نكتب $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = \begin{vmatrix} a & a' & a" \\ b & b' & b" \\ c & c' & c" \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b' & b" \\ c' & c" \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a' & a" \\ c' & c" \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a' & a" \\ b' & b" \end{vmatrix}$

ملاحظة

d_1 و d_2 و d_3 المحددات المستخرجة من $\vec{v}$ و $\vec{w}$

$$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = \begin{vmatrix} a & a' & a" \\ b & b' & b" \\ c & c' & c" \end{vmatrix} = ad_1 - bd_2 + cd_3$$

ب- مبرهنة

لتكن $\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ و $\vec{w}(a";b";c")$ متجهات من الفضاء منسوب إلى أساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية إذا و فقط إذا $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) \neq \vec{0}$

تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مستوائية إذا و فقط إذا $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = \vec{0}$

تمرين

في فضاء منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$، نعتبر النقط $A(2;2;4)$ و $B(2;1;3)$ و $C(1;-1;0)$

و $D(-1;2;1)$ و المتجهات $\vec{u}(-1;2;1)$ و $\vec{v}(1;-3;2)$ و $\vec{w}(-1;1;4)$

1- أدرس استقامية $\vec{u}$ و $\vec{v}$

2- أدرس استوائية $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$

3- أدرس استوائية النقط A و B و C و D

تمرين

في الفضاء V_3 المنسوب إلى أساس متعامد ممنظم $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$، نعتبر $\vec{u}(m;2;1-m)$

و $\vec{v}(2m+1;2;-2m+3)$ حيث m بارامتر حقيقي

1- بين أن مهما كانت m من $\mathbb{R}$: $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين

2- لتكن $\vec{w}(1;-2;1)$ ، بين أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية

4- تمثيل بارامتري لمستقيم- معادلتان ديكارتيان لمستقيم في الفضاء

أ- تمثيل بارامتري لمستقيم

في الفضاء منسوب الى معلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.نعتبر (D) المستقيم المار من النقطة $A(x_0;y_0;z_0)$

و الموجه بالمتجهة $\vec{u}(\alpha;\beta;\lambda)$

لتكن $M(x;y;z)$ من الفضاء

$M \in (D)$ تكافئ $\exists t \in \mathbb{R} / \quad \overrightarrow{AM} = t \cdot \vec{u}$

تكافئ $t \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \lambda t \end{cases}$

تعريف

الفضاء منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. لتكن $A(x_0;y_0;z_0)$ نقطة من الفضاء و $\vec{u}(\alpha;\beta;\lambda)$ متجهة غير منعدمة

النظمة $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases} x=x_0+\alpha t \\ y=y_0+\beta t \\ z=z_0+\lambda t \end{cases}$ تسمى تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من $A(x_0;y_0;z_0)$

و موجه بالمتجهة $\vec{u}(\alpha;\beta;\lambda)$

مثال

$t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases} x=-1-2t \\ y=5+3t \\ z=-2+t \end{cases}$ تمثيل بارامتري للمستقيم (D) المار من $A(1;5;-2)$ و موجه ب $\vec{u}(-2;3;1)$

ب- معادلتان ديكارتيان لمستقيم في الفضاء

ليكن (D) مارا من النقطة $A(x_0;y_0;z_0)$ و $\vec{u}(a;b;c)$ متجهة موجهة له

لتكن $M(x;y;z)$ من الفضاء

$M\in(D)$ تكافئ $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ مستقيمتين

تكافئ جميع المحدد المستخرجة من $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ منعدمة

تكافئ $b(x-x_0)-a(y-y_0)=0$ و $c(x-x_0)-a(z-z_0)=0$ و $c(y-y_0)-b(z-z_0)=0$

الأعداد a و b و c ليست جميعها منعدمة

لنفرض أن $a\neq 0$ و $b\neq 0$ و$c\neq 0$

$M\in(D)$ تكافئ $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$

لنفرض أن أحدهما منعدما مثلا $a=0$ و $b\neq 0$ و$c\neq 0$

$M\in(D)$ تكافئ $\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ و $x-x_0=0$

لنفرض أن اثنين منهما منعدمين مثلا $a=0$ و $b=0$ و$c\neq 0$

$M\in(D)$ تكافئ $y-y_0=0$ و $x-x_0=0$

مرهنة

الفضاء منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

إذا كان مستقيم (D) مارا من النقطة $A(x_0;y_0;z_0)$ و $\vec{u}(a;b;c)$ متجهة موجهة له فان النظمة:

$\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ تسمى نظمة معادلتين ديكارتيين للمستقيم (D) إذا كان $a\neq 0$ و $b\neq 0$ و$c\neq 0$ أما إذا كان أحد المعاملات منعدما فان البسط المرتبط به يكون منعدما أيضا.

أمثلة

* المستقيم (D) المار من $A(1;5;-2)$ و موجه ب $\vec{u}(-2;3;1)$

$\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-5}{3}=z+2$ معادلتان ديكارتيان للمستقيم (D)

* المستقيم (D') المار من $B(1;-2;2)$ و موجه ب $\vec{u}'(-3;0;2)$

$\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{z-2}{2}$ و $y+2=0$ معادلتان ديكارتيان للمستقيم (D')

* المستقيم $(D")$ المار من $C(3;2;-5)$ و موجه ب $\vec{u}"(-3;0;0)$

$y-2=0$ و $z+5=0$ معادلتان ديكارتيان للمستقيم $(D")$

5 - تمثيل بارامتري لمستوى- معادلة ديكارتية للمستوى

أ/ تمثيل بارامتري لمستوى

في الفضاء منسوب إلى معلم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.نعتبر (P) المستوى المار من النقطة $A\left(x_0;y_0;z_0\right)$

و الموجه بالمتجهتين $\vec{u}\left(\alpha;\beta;\lambda\right)$ و $\vec{u}'\left(\alpha';\beta';\lambda'\right)$

لتكن $M\left(x;y;z\right)$ من الفضاء

$M\in(P)$ تكافئ $\exists(t;t')\in\mathbb{R}^2 /\quad \overrightarrow{AM}=t\cdot\vec{u}+t'\cdot\vec{u}'$

تكافئ $(t;t')\in\mathbb{R}^2$ $\begin{cases} x=x_0+\alpha t+\alpha' t' \\ y=y_0+\beta t+\beta' t' \\ z=z_0+\lambda t+\lambda' t' \end{cases}$

تعريف

الفضاء منسوب إلى معلم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. لتكن $A\left(x_0;y_0;z_0\right)$ نقطة من الفضاء و $\vec{u}\left(\alpha;\beta;\lambda\right)$ و $\vec{u}'\left(\alpha';\beta';\lambda'\right)$ متجهتين غير منعدمتين

النظمة $(t;t')\in\mathbb{R}^2$ $\begin{cases} x=x_0+\alpha t+\alpha' t' \\ y=y_0+\beta t+\beta' t' \\ z=z_0+\lambda t+\lambda' t' \end{cases}$ تسمى تمثيلا بارامتريا للمستوى (P) المار من $A\left(x_0;y_0;z_0\right)$ و موجه بالمتجهتين $\vec{u}\left(\alpha;\beta;\lambda\right)$ و $\vec{u}'\left(\alpha';\beta';\lambda'\right)$

ب- معادلة ديكارتية للمستوى

ليكن (P) المستوى المار من $A\left(x_0;y_0;z_0\right)$ و موجه بالمتجهتين $\vec{u}\left(\alpha;\beta;\lambda\right)$ و $\vec{u}'\left(\alpha';\beta';\lambda'\right)$

$$M\left(x;y,z\right)\in(P)\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v}\right)=0$$

$$M\left(x;y,z\right)\in(P)\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_0 & \alpha & \alpha' \\ y-y_0 & \beta & \beta' \\ z-z_0 & \lambda & \lambda' \end{vmatrix}=0$$

$$M\left(x;y,z\right)\in(P)\Leftrightarrow \left(x-x_0\right)\begin{vmatrix} \beta & \beta' \\ \lambda & \lambda' \end{vmatrix}-\left(y-y_0\right)\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \lambda & \lambda' \end{vmatrix}+\left(z-z_0\right)\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix}=0$$

$$M\left(x;y,z\right)\in(P)\Leftrightarrow a\left(x-x_0\right)+b\left(y-y_0\right)+c\left(z-z_0\right)=0$$

بوضع $a=d_1$; $b=-d_2$; $c=d_3$ حيث d_1 و d_2 و d_3 المحددات المستخرجة المرتبطتين بالمتجهتين $\vec{u}\left(\alpha;\beta;\lambda\right)$ و $\vec{u}'\left(\alpha';\beta';\lambda'\right)$

نضع $d=-\left(ax_0+by_0+cz_0\right)$

$$M\in(P)\Leftrightarrow ax+by+cz+d=0$$

مبرهنة

الفضاء منسوب إلى معلم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

للمستوى (P) المار من $A\left(x_0;y_0;z_0\right)$ والموجه بالمتجهتين $\vec{u}\left(\alpha;\beta;\lambda\right)$ و $\vec{u}'\left(\alpha';\beta';\lambda'\right)$

معادلة من شكل $ax+by+cz+d=0$ حيث $(a;b;c)\neq(0;0;0)$

مجموعة النقط $M\left(x;y,z\right)$ من الفضاء التي تحقق العلاقة $ax+by+cz+d=0$ حيث $(a;b;c)\neq(0;0;0)$، مستوى

$ax+by+cz+d=0$ تسمى معادلة ديكارتية للمستوى (P)

مثال

نعتبر المستوى (P) المار من $A(1;-1;0)$ و الموجه بالمتجهتين $\vec{u}(0;3;2)$ و $\vec{v}(-2;-1,0)$

نحدد معادلة ديكارتية للمستوى (P)

لتكن $M(x;y,z)$ من الفضاء

$$M(x;y,z)\in(P)\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v}\right)=0$$

$$M(x;y,z)\in(P)\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 0 & -2 \\ y+1 & 3 & -1 \\ z & 2 & 0 \end{vmatrix}=0$$

$$M(x;y,z)\in(P)\Leftrightarrow 2(x-1)+4(y+1)+6z=0$$

$$M(x;y,z)\in(P)\Leftrightarrow 2x+4y+6z+2=0$$

$2x+4y+6z+2=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (P)

6- الأوضاع النسبية للمستقيمات و المستويات في الفضاء

أ- الأوضاع النسبية لمستقيمين في الفضاء

خاصية

ليكن $(D)=D(A;\vec{u})$ و $(\Delta)=D(B;\vec{v})$ مستقيمين في الفضاء

إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين و $A\in(\Delta)$ أو $B\in(D)$ فان $(D)=(\Delta)$

إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين و $A\notin(\Delta)$ فان (D) و (Δ) متوازيان قطعا

إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين و $\det\left(\overrightarrow{AB};\vec{u};\vec{v}\right)=0$ فان (D) و (Δ) متقاطعان

إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين و $\det\left(\overrightarrow{AB};\vec{u};\vec{v}\right)\neq 0$ فان (D) و (Δ) غير مستوائيين

ب- الأوضاع النسبية لمستويين في الفضاء

مبرهنة

$(P)=P(A;\vec{u};\vec{v})$ و $(Q)=P(B;\vec{u}';\vec{v}')$

- يكون (P) و (P') متوازيين إذا و فقط إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u}'$ و $\vec{v}'$ مستوائية
  أي $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{u}')=0$ و $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{v}')=0$

- يكون (P) و (P') متقاطعان إذا و فقط إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u}'$ و $\vec{v}'$ غير مستوائية
  أي $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{u}')\neq 0$ أ و $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{v}')\neq 0$

خاصيات

$(P): ax+by+cz+d=0$ حيث $(a;b;c)\neq(0;0;0)$

$(P): a'x+b'y+c'z+d'=0$ حيث $(a';b';c')\neq(0;0;0)$

* يكون (P) و (P') متقاطعين إذا وفقط إذا كان $ab'-a'b\neq 0$ أو $bc'-b'c\neq 0$ أو $ac'-a'c\neq 0$

* يكون (P) و (P') متوازيين قطعا إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم t حيث

$a'=ta$; $b'=tb$; $c'=tc$ و $d'\neq td$

* يكون (P) و (P') منطبقين إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم t حيث

$a'=ta$; $b'=tb$; $c'=tc$ و $d'=td$

ج- الأوضاع النسبية لمستقيم و مستوى في الفضاء

مبرهنة_

$(P)=P(A;\vec{u};\vec{v})$ و $(D)=D(B;\vec{u}')$

- يكون (P) و(D) متوازيان إذا و فقط إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u}'$ مستوائية أي $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{u}')=0$
- يكون (P) و(D) متقاطعان إذا و فقط إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u}'$ غير مستوائية أي $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{u}')\neq 0$

ملاحظة

$(P)=P(A;\vec{u};\vec{v})$ و $(D)=D(B;\vec{u}')$ حيث (P) و(D) متوازيان

- إذا كان $B\in(P)$ فان $(D)\in(P)$

- إذا كان $B \notin (P)$ فان (D) يوازي (P) قطعا

تمرين

في فضاء منسوب إلى معلم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ نعتبر النقط $A(2;1;2)$ و $B(1;0;2)$ و $C(1;2;2)$.

ليكن (D) المستقيم المار من A و الموجه بالمتجهة $\vec{u}(1;0;2)$ و (P) المستوى الذي معادلته الديكارتية $x+2y-z+3=0$

1- حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D)

2- حدد معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (D)

3- تأكد أن النقط A و B و C غير مستقيمية ثم حدد معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

4- حدد تمثيلا بارمتريا للمستوى (P)

5- حدد تقاطع (D) و (P)

6- نعتبر المستوى (P') المعرف بالمعادلة الديكارتية $x+y-2z+1=0$

أ- تأكد أن (P) و (P') يتقاطعان

ب- حدد تمثيل بارامتريا للمستقيم (Δ) تقاطع (P) و (P') مع إعطاء متجهة موجهة لـ(Δ)

تمرين

في فضاء منسوب إلى معلم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ نعتبر المستويين:

$$(P_m):\quad 2x+4y+mz-2=0$$

$$(P):\quad 2x+4y-z-3=0$$

و المستقيم

$$(D):\begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

حيث m بارامتري حقيقي

أدرس حسب قيم m الوضع النسبي للمستويين (P_m) و (P)

أدرس حسب قيم m الوضع النسبي للمستوى (P_m) و المستقيم (D)