

## الحسابيات

الأولى سلك بكالوريا علوم رياضة

I- قابلية القسمة في  $\mathbb{Z}$ 

أنشطة

نشاط 1

ليكن  $n$  عددا صحيحا طبيعيا فرديا  
بين أن 8 يقسم  $n^2 - 1$  لكل عدد صحيح الطبيعي فردي  $n$

الحل

ليكن  $n$  عدد صحيح طبيعي فردي أي يوجد  $k$  من  $\mathbb{N}$  حيث  $n = 2k + 1$

$$\text{لدينا } n^2 - 1 = (n-1)(n+1) \text{ ومنه } n^2 - 1 = 4k(k+1)$$

وحيث أن  $k(k+1)$  عدد زوجي (لأنه جداء عددين متتاليين)

فانه يوجد  $k'$  من  $\mathbb{N}$  حيث  $k(k+1) = 2k'$  و بالتالي  $n^2 - 1 = 8k'$

إذن 8 يقسم  $n^2 - 1$

نشاط 2

بين أن لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  العدد  $n^3 - n$  يقبل القسمة على 3

الحل

$$\text{لدينا } n^3 - n = n(n-1)(n+1)$$

ليكن  $n$  من  $\mathbb{N}$  ومنه يوجد  $k \in \mathbb{N}$  حيث  $n = 3k$  أو  $n = 3k + 1$  أو  $n = 3k + 2$

$$\text{و بالتالي } n^3 - n = 3k(3k-1)(3k+1) \text{ أو } n^3 - n = (3k+1)(3k)(3k+2)$$

$$\text{أو } n^3 - n = (3k+2)(3k+1)(3k+3) = 3(3k+2)(3k+1)(k+1)$$

و في جميع هذه الحالات  $n^3 - n = 3k'$  حيث  $k' \in \mathbb{N}$

اذن  $n^3 - n$  يقبل القسمة على 3

نشاط 3

أنشر  $(10^6 - 1)^3$  ثم استنتج باقي القسمة للعدد  $999999^3$  على 5

نشاط 4

حدد الأرقام  $x$  و  $y$  بحيث العدد الصحيح الطبيعي  $11x1y$  قابل للقسمة على 28

## 1- تعريف

ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{Z}$

نقول إن  $b$  يقسم  $a$  و نكتب  $b/a$  إذا وجد  $k$  في  $\mathbb{Z}$  حيث  $a = kb$

$$(a; b) \in \mathbb{Z}^2 \quad b/a \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad a = kb$$

## 2- ملاحظات

\*- إذا كان  $b$  يقسم  $a$  إننا نقول إن  $b$  قاسم لـ  $a$  أو  $a$  مضاعف لـ  $b$

\*- ليكن  $b \in \mathbb{Z}$  مجموعة مضاعفات العدد  $b$  هي المجموعة  $b \cdot \mathbb{Z} = \{k \cdot b / k \in \mathbb{Z}\}$

\*- ليكن  $a \in \mathbb{Z}^*$   $b \in \mathbb{Z}$  :  $b/a \Rightarrow |b| \leq |a|$

3- خاصيات العلاقة " $b/a$ "

\*-  $a/a \quad \forall a \in \mathbb{Z}$  نقول إن العلاقة " $b/a$ " انعكاسية

\*-  $b/a \Rightarrow b/c$   $\forall (a; b; c) \in \mathbb{Z}^3$  نقول إن العلاقة " $b/a$ " متعدية

\*-  $|a| = |b|$   $\forall (a; b; c) \in \mathbb{Z}^3$

$$\forall (a; b; c) \in \mathbb{N}^3 \quad \begin{cases} b/a \\ a/b \end{cases} \Rightarrow a = b$$

نقول إن العلاقة "  $b/a$  " تخالفية في  $\mathbb{N}$

$$\forall (a; b) \in \mathbb{Z}^2 \quad b/a \Leftrightarrow a \cdot \mathbb{Z} \subset b \cdot \mathbb{Z}$$

$$\forall (a; x_1; x_2; y_1; y_2) \in \mathbb{Z}^5 \quad a/(x_1 - y_1) \wedge a/(x_2 - y_2) \Leftrightarrow a/(x_1 x_2 - y_1 y_2)$$

**II- القسمة الاقليدية في  $\mathbb{Z}$** **1- القسمة الاقليدية في  $\mathbb{N}$** **مبرهنة**

ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{N}$  حيث  $a \neq b$   
يوجد زوج وحيد  $(q; r)$  من  $\mathbb{N}^2$  حيث  $a = bq + r$  حيث  $0 \leq r < b$

**اصطلاحات**

العملية التي تمكننا من تحديد  $(q; r)$  بحيث  $a = bq + r$  حيث  $0 \leq r < b$  تسمى القسمة الاقليدية لـ  $a$  على  $b$  في  $\mathbb{N}$   
العدد  $a$  يسمى المقسوم و العدد  $b$  يسمى المقسوم عليه و العدد  $q$  الخارج و  $r$  الباقي.  
2- القسمة الاقليدية في  $\mathbb{Z}$

**مبرهنة**

ليكن  $a$  من  $\mathbb{Z}$  و  $b$  في  $\mathbb{N}^*$  حيث  $a \neq b$   
يوجد زوج وحيد  $(q; r)$  من  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  حيث  $a = bq + r$  حيث  $0 \leq r < b$

**اصطلاحات**

العملية التي تمكننا من تحديد  $(q; r)$  من  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  بحيث  $a = bq + r$  حيث  $0 \leq r < b$  تسمى القسمة الاقليدية لـ  $a$  على  $b$  في  $\mathbb{Z}$   
العدد  $a$  يسمى المقسوم و العدد  $b$  يسمى المقسوم عليه و العدد  $q$  الخارج و  $r$  الباقي

**تمرين**

حدد الأعداد الصحيحة النسبية  $x$  بحيث يكون للقسمة الاقليدية لـ  $x$  على  $7$  خارج  $q$  و باقي  $q^2$

**تمرين**

بين إذا كان للقسمة الاقليدية لـ  $a$  على  $b$  و القسمة الاقليدية لـ  $a'$  على  $b$  نفس الخارج  $q$  و كان  $a < x < a'$  فان خارج القسمة الاقليدية لـ  $x$  على  $b$

**- الأعداد الأولية****1- تعاريف**

أ- القواسم الفعلية لعدد صحيح نسبي

**تعريف**

ليكن  $a \in \mathbb{Z}$   
نقول إن العدد  $d$  قاسم فعلي للعدد  $a$  إذا و فقط إذا كان  $d$  يقسم  $a$  و  $d \notin \{-1; 1; -a; a\}$

**أمثلة**

\*- القواسم الفعلية للعدد 6 هي 2 و -2 و 3 و -3  
\*- لدينا  $D_7 = \{1; -1; 7; -7\}$  العدد 7 لا يقبل قواسم فعلية

**ب- الأعداد الأولية****تعريف**

ليكن  $a \in \mathbb{Z}$   
نقول إن العدد  $a$  أولي إذا و فقط إذا كان  $a$  يخالف 1 و -1 و ليس له قواسم فعلية  
 $a$  أولي  $\Leftrightarrow D_a = \{1; -1; a; -a\}$  و  $|a| \neq 1$

نرمز لمجموعة الأعداد الأولية بـ  $P$

**2- خاصيات**

أ- إذا كان  $p$  و  $q$  عددين أوليين و  $|q| \neq |p|$  فان قاسمهما المشترك الأكبر هو 1 ( العكس غير صحيح )  
 ب- ليكن  $a$  عددا غير أولي في  $\mathbb{Z}^*$  و يخالف 1 و -1 .  
 أصغر قاسم فعلي موجب للعدد  $a$  هو عدد أولي  
 د- مجموعة الأعداد الأولية غير المنتهية

البرهان

نبرهن أن مجموعة الأعداد الأولية غير المنتهية

لتكن  $P^+$  مجموعة الأعداد الأولية الموجبة

$$2 \in P^+ \text{ لأن } P^+ \neq \emptyset$$

لنفترض أن  $P^+$  منتهية و ليكن  $p$  أكبر عنصر من  $P^+$  . لنعتبر  $m = p! + 1$  لدينا  $m > p$

ومنه  $m \notin P^+$  أي  $m$  ليس أوليا و بالتالي للعدد  $m$  قاسم أولي  $q$  ومنه  $q \in P^+$  و  $q \leq p$

$q \leq p$  يستلزم  $q$  يقسم  $p!$  لأن  $(q$  أحد عوامل  $p!)$

لدينا  $q/m$  و  $q/p!$  ومن  $q/(m-p!)$  أي  $q/1$  وهذا يتناقض مع كون  $q$  أولي

ومنه  $P^+$  غير منتهية إذن  $P$  غير منتهية

3- طريقة عملية لتحديد الأعداد الأولية

مبرهنة

ليكن  $n \in \mathbb{N}$  و  $n \geq 2$

إذا كان  $n$  غير أولي فانه يوجد عدد أولي موجب  $p$  يقسم  $n$  و  $p^2 \leq n$

البرهان

ليكن  $n \in \mathbb{N}$  و  $n \geq 2$  و  $n$  غير أولي و ليكن  $p$  أصغر قاسم فعلي موجب لـ  $n$  إذن  $p$  أولي ومنه يوجد

$k$  من  $\mathbb{N}^*$  حيث  $n = pk$

بما أن  $1 < p < n$  فان  $1 < k < kp = n$  إذن  $k$  قاسم فعلي موجب للعدد  $n$  و بالتالي  $p \leq k$

$$\text{إذن } p^2 \leq pk = n$$

ملاحظة

ليكن  $n \in \mathbb{N}$  و  $n \geq 2$

لتأكد من أن  $n$  هل أولي أم لا. نرى هل يقبل القسمة على أحد الأعداد الأولية  $p$  حيث  $p^2 \leq n$

❖ فإذا كان يقبل القسمة على أحدهم فان  $n$  غير أولي

❖ وإذا كان لا يقبل القسمة على أي واحد مهن فان  $n$  عدد أولي

( عمليا نتوقف عندما تكون  $n > p^2$  )

مثال العدد 179 لا يقبل القسمة على أي عدد من الأعداد الأولية التالية 2 و 3 و 5 و 7 و 11 و 13

$$17^2 = 289 ; 13^2 = 169$$

4- خاصيات

خاصية

\*- إذا كان عدد أولي يقسم جداء أعداد صحيحة نسبية فانه يقسم أحد عوامل هذا الجداء

نتيجة

لتكن  $p_1$  و  $p_2$  و ..... و  $p_n$  أعداد أولية موجبة و  $p$  عددا أوليا

$$p / p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n \Rightarrow \exists i \in \{1; 2; \dots; n\} \quad p = p_i$$

5- التفكيك الى جداء من عوامل أولية

1- مبرهنة

كل عدد صحيح نسبي  $n$  غير منعدم ومخالف لـ 1 و -1 يمكن كتابته بكيفية وحيدة على شكل

$$n = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k} \text{ حيث } p_1 \text{ و } p_2 \text{ و } \dots \text{ و } p_n \text{ أعداد أولية مختلفة مثنى مثنى و } \alpha_1$$

و  $\alpha_2$  و ..... و  $\alpha_n$  أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة و  $\varepsilon = \pm 1$

ملاحظة عندما نكتب  $n$  على شكل  $n = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$  فاننا نقول اننا فككنا  $n$  الى جداء

عوامل أولية

مثال فكك العدد 1752- إلى جداء عوامل أولية

ليكن  $n = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$  حيث  $p_1$  و  $p_2$  و ..... و  $p_n$  أعداد أولية  
يكون عدد  $d$  قاسما للعدد  $n$  إذا وفقط إذا كان تفكيك  $d$  إلى عوامل جداء أولية على شكل

$$d = \varepsilon p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \dots \times p_k^{\beta_k}$$

حيث  $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$  لكل  $i$  من  $\{1; 2; \dots; k\}$

نتيجة 2

ليكن  $n = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$  حيث  $p_1$  و  $p_2$  و ..... و  $p_n$  أعداد أولية  
يكون عدد  $m$  مضاعفا للعدد  $n$  إذا وفقط إذا كان تفكيك  $m$  إلى عوامل جداء أولية على شكل

$$d = \varepsilon p_1^{\lambda_1} \times p_2^{\lambda_2} \times \dots \times p_k^{\lambda_k}$$

حيث  $0 \leq \alpha_i \leq \lambda_i$  لكل  $i$  من  $\{1; 2; \dots; k\}$

## -IV القاسم المشترك الأكبر

نرمز لمجموعة قواسم العدد الصحيح النسبي  $a$  بالرمز  $D_a$

-1 تعريف

ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{Z}^*$   
القاسم المشترك الأكبر للعددين  $a$  و  $b$  هو أكبر قاسم مشترك موجب قطعاً لـ  $a$  و  $b$  يرمز له  
 $a \wedge b$

$$\delta = a \wedge b \Leftrightarrow \begin{cases} \delta \in D_a \cap D_b \\ \forall x \in D_a \cap D_b \quad x \leq \delta \end{cases}$$

-2 خاصيات

ليكن  $a$  و  $b$  و  $c$  من  $\mathbb{Z}^*$

$$a \wedge b = b \wedge a$$

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$

$$a \wedge a = |a|$$

مثال  $48 \wedge 60 = 12$ 

-3 خوارزمية اقليدس أو طريقة " القسمة المتتالية " لتحديد القاسم المشترك  
أ- ملاحظة

$$\forall a \in \mathbb{Z}^* \quad D_a = D_{-a} \quad *$$

$\forall (a; b) \in \mathbb{Z}^{*2} \quad a \wedge b = |a| \wedge |b| \quad *$  ومنه تحديد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين نسبيين

يرجع إلى تحديد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين طبيعيين.

ب- ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{N}^*$ 

- إذا كان  $b/a$  فإن  $a \wedge b = b$

- إذا كان  $b$  لا يقسم  $a$  فانه يوجد زوج وحيد  $(q; r)$  من  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$  حيث  $0 < r < b$  و  $a = bq + r$

بما أن  $r = a - bq$  فان كل قاسم مشترك لـ  $a$  و  $b$  يقسم  $r$

و بالتالي قاسم قاسم مشترك لـ  $a$  و  $b$  هو قاسم مشترك لـ  $r$  و  $b$  أي  $D_a \cap D_b \subset D_r \cap D_b$

عكسياً كل قاسم مشترك لـ  $b$  و  $r$  يقسم  $a$  ( لأن  $a = bq + r$  )

ومنه كل قاسم مشترك لـ  $b$  و  $r$  هو قاسم مشترك لـ  $a$  و  $b$  أي  $D_r \cap D_b \subset D_a \cap D_b$

إذن  $D_a \cap D_b = D_r \cap D_b$  و بالتالي  $a \wedge b = r \wedge b$

تمهيدة

ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{N}^*$  بحيث  $b$  لا يقسم  $a$  و  $r$  باقي القسمة الاقليدية لـ  $a$  على  $b$

$$a \wedge b = r \wedge b$$

ج- ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{N}^*$  نفترض أن  $b < a$

بإجراء القسمة الاقليدية لـ  $a$  على  $b$  نحصل على  $a = bq_1 + r_1$  حيث  $0 \leq r_1 < b$

❖ إذا كان  $r_1 = 0$  فإن  $b/a$  و منه  $a \wedge b = b$

❖ إذا كان  $r_1 > 0$  نجري القسمة الاقليدية لـ  $b$  على  $r_1$  ونحصل على  $b = r_1q_2 + r_2$  و  $0 \leq r_2 < r_1$

إذا كان  $r_2 = 0$  فإن  $b \wedge r_1 = r_1$  و منه  $a \wedge b = b \wedge r_1 = r_1$

إذا كان  $r_2 > 0$  نجري القسمة الاقليدية لـ  $r_1$  على  $r_2$  ونحصل على  $r_1 = r_2q_3 + r_3$  و  $0 \leq r_3 < r_2$

.....

بإجراء العملية  $n$  مرة نحصل على

$$a \wedge b = b \wedge r_1, \quad 0 < r_1 < b, \quad a = bq_1 + r_1$$

$$b \wedge r_1 = r_1 \wedge r_2, \quad 0 < r_2 < r_1, \quad b = r_1q_2 + r_2$$

$$r_1 \wedge r_2 = r_2 \wedge r_3, \quad 0 < r_3 < r_2, \quad r_1 = r_2q_3 + r_3$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$r_{n-2} \wedge r_{n-1} = r_{n-1} \wedge r_n, \quad 0 < r_n < r_{n-1}, \quad r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n$$

و منه نستنتج  $a \wedge b = b \wedge r_1 = r_1 \wedge r_2 = r_2 \wedge r_3 = \dots = r_{n-2} \wedge r_{n-1} = r_{n-1} \wedge r_n$

$$0 < r_n < r_{n-1} < \dots < r_3 < r_2 < r_1 < b$$

نضع  $A = \{r_1; r_2; r_3; \dots; r_n; \dots\}$

$A$  جزء من  $\mathbb{N}$  مكبور بالعدد  $b$  و منه  $A$  مجموعة منتهية

إذن  $\exists p \in \mathbb{N} / r_{p+1} = 0 ; r_p \neq 0$

بما أن  $r_{p+1} = 0$  فإن  $r_{p-1} = r_pq_{p+1}$  و منه  $r_{p-1} \wedge r_p = r_b$

إذن  $a \wedge b = r_p$

نتيجة

ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{N}^*$

القاسم المشترك الأكبر للعددين  $a$  و  $b$  هو اخر باقي غير منعدم في طريقة القسمة المتتالية لـ  $a$  على  $b$

**مثال** باستعمال طريقة القسمة المتتالية، نحدد القاسم المشترك الأكبر للعددين 1640 و 156

$$1640 = 156 \times 10 + 80$$

$$156 = 80 \times 1 + 76$$

$$80 = 76 \times 1 + 4$$

$$76 = 4 \times 19 + 0$$

$$\text{إذن } 1640 \wedge 156 = 4$$

-1 خاصيات

أ- مبرهنة

ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{Z}^*$  و  $\delta = a \wedge b$

يوجد عدنان  $u$  و  $v$  من  $\mathbb{Z}$  حيث  $\delta = au + bv$

البرهان

ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{Z}^*$  و  $\delta = a \wedge b$

نعتبر  $A = \{n \in \mathbb{N}^* / n = au + bv ; (u; v) \in \mathbb{Z}^2\}$

لدينا  $A \neq \emptyset$  لأن  $a^2 + b^2 \in A$

$A \subset \mathbb{N}$  و بالتالي  $\forall x \in A \quad x \geq p$

ليكن  $p = au_0 + bv_0$  نبرهن أن  $\delta = p$

- ❖ بما أن  $\delta/a$  و  $\delta/b$  فان  $\delta/p$  و منه  $\delta \leq p$
- ❖ بإنجاز القسمة لـ  $a$  على  $p$  نحصل على  $a = pq + r$  ;  $0 \leq r < p$   $\exists (q; r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$
- ❖ ومنه  $r = a - q(au_0 + bv_0) = a(1 - qu_0) + b(-qv_0)$
- إذا كان  $r > 0$  فان  $r \in A$  و منه  $r \geq p$  وهذا يتناقض مع كون  $r < p$
- و بالتالي  $r = 0$  أي  $p/a$  و بنفس الطريقة نبرهن أن  $p/b$
- ومنه  $p$  قاسم مشترك لـ  $a$  و  $b$  و بالتالي  $\delta \geq p$
- لدينا  $\delta \leq p$  و  $\delta \geq p$  إذن  $\delta = p$

### ب- استنتاجات

- \* من البرهان السابق نستنتج  $\delta = a \wedge b$  هو أصغر عدد موجب قطعاً من المجموعة  $B = \{n \in \mathbb{Z}^* / n = au + bv ; (u; v) \in \mathbb{Z}^2\}$
- \* بما أن  $\delta$  قاسم مشترك لـ  $a$  و  $b$  فان أي قاسم لـ  $\delta$  يقسم  $a$  و  $b$
- عكسيا إذا كان  $c$  قاسم مشترك لـ  $a$  و  $b$  فان  $a = k_1c$  ;  $b = k_2c$   $\exists (k_1; k_2) \in \mathbb{Z}^2$
- بما أن  $\delta = a \wedge b$  فانه  $\delta = au + bv$   $\exists (u; v) \in \mathbb{Z}^2 /$
- ومنه  $\delta = (k_1u + k_2v)c$  أي  $c$  يقسم  $\delta$

### مبرهنة

ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{Z}^*$  و  $\delta = a \wedge b$   
مجموعة قواسم  $\delta$  هي مجموعة القواسم المشتركة لـ  $a$  و  $b$   $(D_a \cap D_b = D_\delta)$

### نتيجة

إذا كان  $a$  و  $b$  و  $c$  أعداد من  $\mathbb{Z}$  فان  
 $a \wedge b = \delta \Rightarrow ca \wedge cb = |c|\delta$

### خاصية

ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{Z}^*$  حيث  $a = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$  و  $b = \varepsilon p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \dots \times p_k^{\beta_k}$  و  
وحيث  $p_1$  و  $p_2$  و  $p_3$  و  $p_4$  و  $p_5$  و  $p_6$  و  $p_7$  و  $p_8$  و  $p_9$  و  $p_{10}$  أعداد أولية  
القاسم المشترك الأكبر للعددين  $a$  و  $b$  هو العدد  $\delta = p_1^{\lambda_1} \times p_2^{\lambda_2} \times \dots \times p_k^{\lambda_k}$   
حيث  $\lambda_i = \inf(\alpha_i; \beta_i)$  و  $i$  تنتمي  $\{1; 2; \dots; k\}$

مثال حدد  $1170 \wedge 180$

### 2- القاسم المشترك الأكبر لعدة أعداد

#### تعريف

$a_1$  و  $a_2$  و  $a_3$  و  $a_4$  و  $a_5$  و  $a_6$  و  $a_7$  و  $a_8$  و  $a_9$  و  $a_{10}$  أعداد من  $\mathbb{Z}^*$   
أكبر عدد صحيح طبيعي يقسم في آن واحد  $a_1$  و  $a_2$  و  $a_3$  و  $a_4$  و  $a_5$  و  $a_6$  و  $a_7$  و  $a_8$  و  $a_9$  و  $a_{10}$  يسمى القاسم المشترك الأكبر لـ  $a_1$   
و  $a_2$  و  $a_3$  و  $a_4$  و  $a_5$  و  $a_6$  و  $a_7$  و  $a_8$  و  $a_9$  و  $a_{10}$

مثال  $15 \wedge 18 \wedge 12 = 3$

### نتيجة

إذا كان  $\delta$  هو القاسم المشترك الأكبر لـ  $a_1$  و  $a_2$  و  $a_3$  و  $a_4$  و  $a_5$  و  $a_6$  و  $a_7$  و  $a_8$  و  $a_9$  و  $a_{10}$  فان  
و  $\alpha_k$  من  $\mathbb{Z}$  حيث  $\sum_{i=1}^k \alpha_i a_i$

### VI- المضاعف المشترك الأصغر

#### 1- تعريف

ليكن  $(a; b) \in \mathbb{Z}^2$   
المضاعف المشترك الأصغر لـ  $a$  و  $b$  هو أصغر مضاعف مشترك موجب لـ  $a$  و  $b$  نرسم له بـ  $a \vee b$

#### 2- خاصيات

أ- \* ليكن  $a$  و  $b$  و  $c$  من  $\mathbb{Z}^*$

$$a \vee b = b \vee a$$

$$(a \vee b)|c| = ac \vee bc$$

$$a \wedge a = |a|$$

$$b/a \Leftrightarrow a \vee b = |a|$$

ب- \* ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{Z}^*$  و  $a \vee b = m$

كل مضاعف مشترك لـ  $a$  و  $b$  هو مضاعف للعدد  $m$

ج- مبرهنة

ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{Z}^*$  و  $a \vee b = m$  و  $a \wedge b = \delta$

$$m\delta = |ab|$$

نتيجة

ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{Z}^*$

$$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a \vee b = |ab|$$

خاصية

ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{Z}^*$  حيث  $a = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$  و  $b = \varepsilon p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \dots \times p_k^{\beta_k}$  وحيث  $p_1, p_2, \dots, p_n$  أعداد أولية

المضاعف المشترك الأصغر للعددين  $a$  و  $b$  هو العدد  $m = p_1^{\lambda_1} \times p_2^{\lambda_2} \times \dots \times p_k^{\lambda_k}$  حيث  $\lambda_i = \sup(\alpha_i; \beta_i)$  و  $i$  تنتمي  $\{1; 2; \dots; k\}$

مثال حدد  $1170 \vee 180$

3- المضاعف المشترك لعدة أعداد

تعريف

$a_1$  و  $a_2$  و  $a_3$  و  $a_k$  أعداد من  $\mathbb{Z}^*$

أصغر مضاعف مشترك موجب للأعداد  $a_1$  و  $a_2$  و  $a_3$  و  $a_k$  يسمى المضاعف المشترك الأصغر لـ  $a_1$

و  $a_2$  و  $a_3$  و  $a_k$

و استنتج عدد قواسم عدد صحيح نسبي

III- الموافقة بترديد n

1- تعريف

ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{Z}$  و  $n$  من  $\mathbb{N}$

نقول إن  $a$  يوافق  $b$  بترديد  $n$  و نكتب  $a \equiv b [n]$  إذا كان  $n$  يقسم  $a - b$

$$\forall (a; b) \in \mathbb{Z}^2 \quad a \equiv b [n] \Leftrightarrow n/a - b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad a - b = kn$$

2- خاصيات العلاقة " الموافقة بترديد n "

أ-  $[n] \quad a \equiv a \quad \forall a \in \mathbb{Z}$  نقول إن العلاقة " الموافقة بترديد n " انعكاسية

ب-  $[n] \quad b \equiv a \quad [n] \Rightarrow a \equiv b \quad \forall (a; b) \in \mathbb{Z}$  نقول إن العلاقة " الموافقة بترديد n " تماثلية

ج-  $[n] \quad a \equiv c \quad [n] \Rightarrow a \equiv b \quad [n] \text{ et } b \equiv c \quad [n] \Rightarrow a \equiv c \quad \forall (a; b) \in \mathbb{Z}$  نقول إن العلاقة " الموافقة بترديد n "

متعدية

نلخص الخاصيات أ و ب و ج بقولنا إن العلاقة " الموافقة بترديد n " علاقة تكافؤ

د- خاصية

ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{Z}$  و  $n$  من  $\mathbb{N}$

$a \equiv b [n]$  تكافؤ  $a$  و  $b$  لهما نفس باقي القسمة الاقليدية على  $n$

البرهان

ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{Z}$  و  $n$  من  $\mathbb{N}$  بحيث  $a = nq_1 + r_1$  و  $b = nq_2 + r_2$  مع  $0 \leq r_1 < n$  و  $0 \leq r_2 < n$

❖ إذا كان  $a$  و  $b$  لهما نفس باقي القسمة الاقليدية على  $n$  أي  $r_1 = r_2$  فان  $a - b = n(q_1 - q_2)$

$$a \equiv b \quad [n] \quad \text{أي أن}$$

❖ عكسيا إذا كان  $a \equiv b \quad [n]$  فانه يوجد  $k$  من  $\mathbb{Z}$  حيث  $a - b = nk$

$$\text{ومنه } r_1 - r_2 = (k - q_1 - q_2)n \text{ أي } n \text{ يقسم } r_1 - r_2$$

$$\text{ولدينا } 0 \leq r_1 < n \text{ و } 0 \leq r_2 < n \text{ ومنه } |r_1 - r_2| < n$$

$$\text{وبالتالي } r_1 - r_2 = 0 \text{ أي } r_1 = r_2$$

### 3- المجموعة $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$$\forall (a;n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad \exists (q;r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad a = nq + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < n \quad - *$$

$$\forall (a;n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad \exists r \in \mathbb{N} \quad a \equiv r \quad [n] \quad \text{et} \quad r \in \{0;1;\dots;n-1\} \quad -$$

- المجموعة  $\{x \in \mathbb{Z} / x \equiv r \quad [n]\}$  هي مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية التي لها نفس الباقي  $r$

في القسمة الاقليدية على  $n$  نرمز لها بـ  $\bar{r}$

المجموعة  $\bar{r}$  تسمى صنف تكافؤ  $r$  بالنسبة للعلاقة " الموافقة بترديد  $n$ " في  $\mathbb{Z}$

$$x \in \bar{r} \Leftrightarrow x \equiv r \quad [n] \quad -$$

$$\forall a \in \mathbb{Z} \quad \exists r \in \{0;1;\dots;n-1\} / \bar{a} \equiv \bar{r} \quad \text{أي} \quad \forall a \in \mathbb{Z} \quad \exists r \in \{0;1;\dots;n-1\} / a \equiv r \quad [n] \quad - *$$

$$- \text{ إذا كان } \bar{r} = \bar{r}' \text{ و } 0 \leq r < n \text{ و } 0 \leq r' < n \text{ فان } r = r'$$

$$- * \quad \forall (x;n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad \exists r \in \{0;1;\dots;n-1\} / x \in \bar{r} \quad (r \text{ باقي القسمة الاقليدية على } n)$$

$$\text{اذن } \mathbb{Z} = \bar{0} \cup \bar{1} \cup \bar{2} \cup \dots \cup \overline{(n-1)}$$

المجموعة  $\{\bar{0}; \bar{1}; \dots; \overline{(n-1)}\}$  برمز لها بالرمز  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

عناصر  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  منفصلة مثنى مثنى

#### أمثلة

$$* \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}\} \quad \text{حيث } \bar{0} = 2 \cdot \mathbb{Z} \quad \text{و} \quad \bar{1} = \{x \in \mathbb{Z} / x = 2k + 1 \quad (k \in \mathbb{Z})\}$$

$$* \quad \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}; \bar{5}; \bar{6}\} \quad \text{حيث } \bar{0} = 7 \cdot \mathbb{Z} \quad \text{و} \quad \bar{1} = \{x \in \mathbb{Z} / x = 7k + 1 \quad (k \in \mathbb{Z})\}$$

$$\text{و} \quad \bar{2} = \{x \in \mathbb{Z} / x = 7k + 2 \quad (k \in \mathbb{Z})\} \quad \text{و} \quad \bar{3} = \{x \in \mathbb{Z} / x = 7k + 3 \quad (k \in \mathbb{Z})\}$$

$$\text{و} \dots \dots \dots \text{و} \quad \bar{6} = \{x \in \mathbb{Z} / x = 7k + 6 \quad (k \in \mathbb{Z})\}$$

$$\text{في } \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \quad \text{لدينا } \bar{4} = \bar{532} \quad \text{لأن } 532 \equiv 4 \quad [7]$$

$$\bar{6} = \bar{-36} \quad \text{لأن } -36 \equiv 6 \quad [7]$$

#### 4- انسجام العلاقة " الموافقة بترديد $n$ " مع الجمع والضرب أ- خاصية

ليكن  $x$  و  $y$  و  $z$  و  $t$  من  $\mathbb{Z}$  و  $n$  من  $\mathbb{N}$

$$\text{إذا كان } x \equiv y \quad [n] \text{ و } z \equiv t \quad [n] \text{ فان } x + z \equiv y + t \quad [n]$$

$$\text{إذا كان } x \equiv y \quad [n] \text{ و } z \equiv t \quad [n] \text{ فان } x \times z \equiv y \times t \quad [n]$$

نقول إن العلاقة " الموافقة بترديد  $n$ " منسجمة مع الجمع والضرب

#### ب- نتائج

$$* - \text{ إذا كانت } x \in \bar{r} \text{ و } x' \in \bar{r}' \text{ فان } x + x' \in \overline{r+r'} \text{ و } x \times x' \in \overline{r \times r'} \quad \text{نكتب } \overline{r+r'} = \overline{r} + \overline{r}'$$

$$\text{و} \quad \overline{r \times r'} = \overline{r} \times \overline{r}'$$

$$* - \quad \forall (a;b) \in \mathbb{Z}^2 \quad \forall (p;n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \quad a \equiv b \quad [n] \Rightarrow a^p \equiv b^p \quad [n]$$

#### أمثلة



$$\overline{3} \times \overline{4} = \overline{12} = \overline{2} \quad , \quad \overline{0} + \overline{1} + \overline{2} + \overline{3} + \overline{4} = \overline{10} = \overline{0} \quad , \quad \overline{3} + \overline{4} = \overline{7} = \overline{2} \quad \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \text{ في } *$$

تمرين

$$\overline{x} + \overline{5} = \overline{2} \quad \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \text{ حيث في } x$$

تمرين

$$-1 \text{ أعط جدول الجمع ثم الضرب في } \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$

$$-2 \text{ بين أن العدد } 2^{70} + 3^{70} \text{ قابلة للقسمة على } 13$$

تمرين

$$-3 \text{ بين أن } [n] \equiv 0 \pmod{n^4 - 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$-4 \text{ بين أن } 17 \text{ يقسم } 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}^*$$

$$-3 \text{ ليكن } n \text{ من } \mathbb{N} \text{ ، حدد بواقي القسمة الاقليدية للأعداد } 1^n + 2^n + 3^n + 4^n \text{ على } 4$$