المتجهات في الفضاء

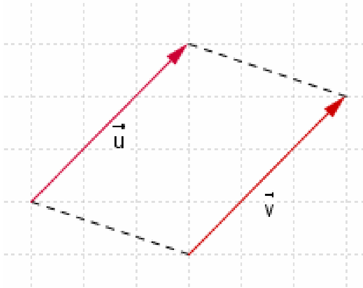
I)- تساوي متجهتين – جمع المتجهات

1- عناصر متجهة

A و B نقطتين مختلفتين من الفضاء، إذا رمزنا للمتجهة $\overrightarrow{AB}$ بالرمز $\vec{u}$ فان :

- اتجاه $\vec{u}$ هو اتجاه المستقيم (AB)
- منحى $\vec{u}$ هو المنحى من A إلى B
- منظم $\vec{u}$ هي المسافة AB و نكتب: $AB = \|\vec{u}\|$

ملحوظة: لكل نقطة A من الفضاء المتجهة $\overrightarrow{AA}$ ليس لها اتجاه و منظمها منعدم.
$\overrightarrow{AA}$ تسمى المتجهة المنعدمة و نكتب $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

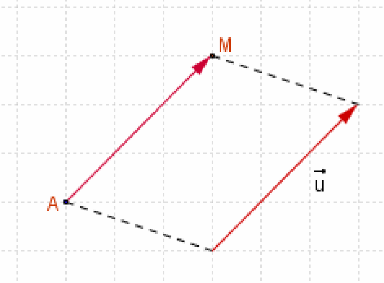


$\vec{u} = \vec{v}$

2- تساوي متجهتين

تعريف

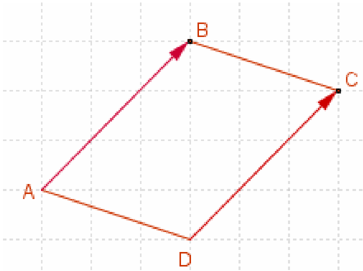
تكون متجهتان متساويتان اذا كان لهما نفس الاتجاه و نفس المنحى و نفس المنظم



لكل متجهة $\vec{u}$ من الفضاء و لكل نقطة A في الفضاء
توجد نقطة وحيدة M حيث $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$

خاصية

$ABCD$ رباعيا في الفضاء
$ABCD$ متوازي الأضلاع إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

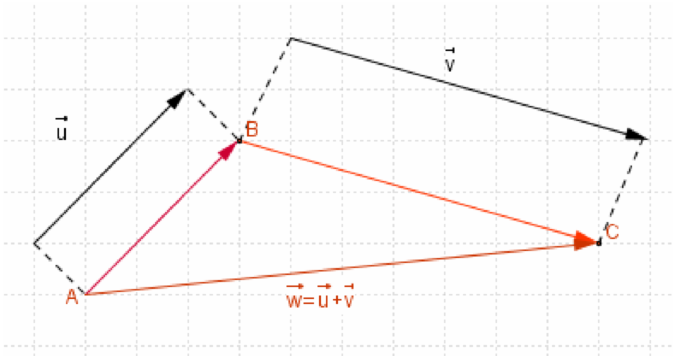


خاصية

لتكن A و B و C و D أربع نقط من الفضاء
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ (تبديل الوسطين)
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CA}$ (تبديل الطرفين)

3- مجموع متجهتين –علاقة شال

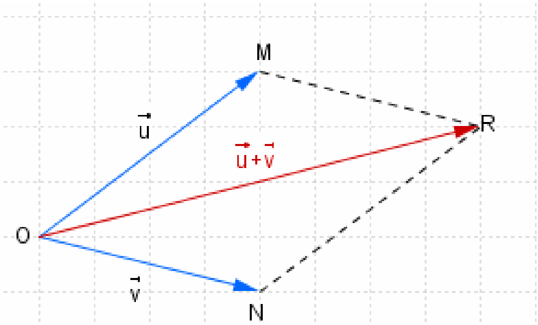
أ- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان في الفضاء
لتكن A نقطة من الفضاء،
توجد نقطة وحيدة B حيث $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.
توجد نقطة وحيدة C حيث $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$.
النقطتان A و C تحددان متجهة وحيدة $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$



المتجهة $\vec{w}$ هي مجموع المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$
نكتب $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

ب- علاقة شال

مهما كانت النقط A و B و C من الفضاء
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$



نتيجة

لتكن O و M وN و R أربع نقط من الفضاء
$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OR}$ إذا وفقط إذا كان $OMRN$ متوازي الأضلاع

ملاحظة: اذا كانت $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$ فان
$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OR}$ حيث $OMRN$ متوازي الأضلاع

ج- خاصيات

*- لكل متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

*- لكل ثلاث متجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

*- لكل متجهة $\vec{u}$ $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$

مقابل متجهة - فرق متجهتين

أ- مقابل متجهة

لتكن $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة في الفضاء
مقابل المتجهة $\vec{u}$ هي المتجهة التي لها نفس الاتجاه و نفس المنظم و منحاها مضاد لمنحى المتجهة $\vec{u}$ نرمز لها بالرمز $-\vec{u}$

*- لكل متجهة $\vec{u}$: $\vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}$

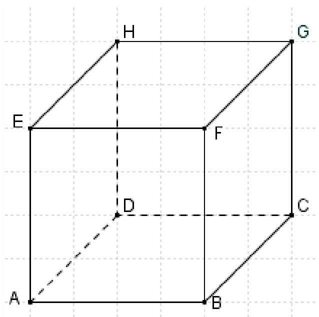
* لكل نقطتين A و B من المستوى لدينا $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$
المتجهتان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ متقابلتان نكتب $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

ب- فرق متجهتين

تعريف

لكل متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$

ملاحظة لكل ثلاث نقط A و B و C $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$



أمثلة

$ABCDEFGH$ مكعب

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{HG}$ $\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{HE}$ $\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EC}$

4- منتصف قطعة

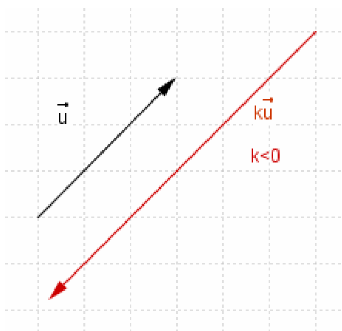
I منتصف $[AB]$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$ $(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0})$

II) الاستقامية – التعريف المتجهي للمستقيم

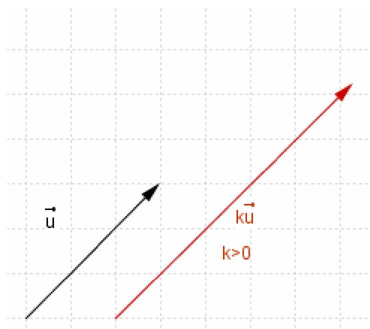
1- ضرب متجهة في عدد حقيقي

تعريف

$\vec{u}$ متجهة غير منعدمة و k عدد حقيقي غير منعدم
جداء المتجهة $\vec{u}$ في العدد الحقيقي k هي المتجهة $k\vec{u}$ حيث :
* $\vec{u}$ و $k\vec{u}$ لهما نفس الاتجاه
* $\|k\vec{u}\|=|k|\times\|\vec{u}\|$
* منحى $k\vec{u}$ هو
منحى $\vec{u}$ إذا كان $k \succ 0$
عكس منحى $\vec{u}$ إذا كان $k \prec 0$



$k \prec 0$



$k \succ 0$

* لكل متجهة $\vec{u}$ و لكل عدد حقيقي k : $0\cdot\vec{u}=\vec{0}$ و $k\cdot\vec{0}=\vec{0}$

2 - خاصيات

مهما تكن المتجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و مهما يكن العددان الحقيقيان α و β فان

$\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$ $(\alpha+\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$

$1\cdot\vec{u}=\vec{u}$ $(\alpha\beta)\vec{u}=\alpha(\beta\vec{u})$

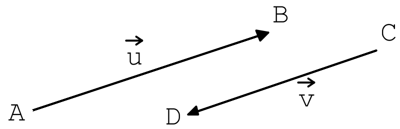
$\alpha\vec{u}=\vec{0}$ إذا وفقط إذا كان $\alpha=0$ أو $\vec{u}=\vec{0}$

3- الاستقامية

استقامية متجهتين

أ- تعريف

تكون متجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين إذا و فقط كانت احداهما جداء الأخرى في عدد حقيقي



ملاحظة

$\vec{0}$ مستقيمية مع أية متجهة

استقامية ثلاث نقط

تعريف

لتكن A و B و C نقطا من الفضاء حيث $A \neq B$

تكون النقط A و B و C مستقيمية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي α حيث $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB}$

توازي مستقيمين

لتكن A و B و C و D نقطا من الفضاء حيث $A \neq B$ و $C \neq D$

$(AB)//(CD)$ إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مستقيميتين

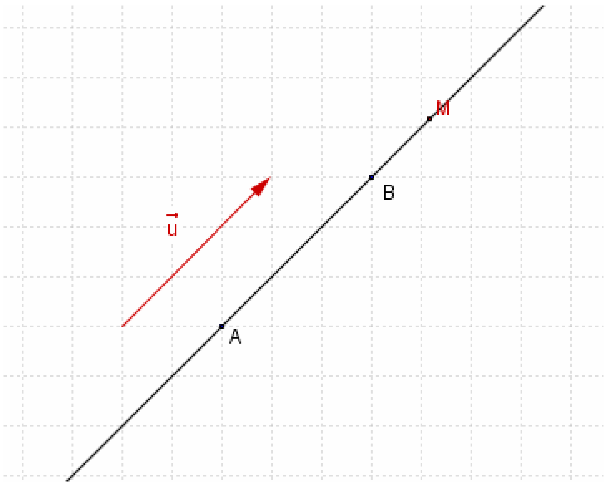
التعريف المتجهي لمستقيم في الفضاء

تعريف

لتكن A و B نقطتين مختلفتين من الفضاء

كل متجهة $\vec{u}$ غير منعدمة و مستقيمية مع المتجهة $\overrightarrow{AB}$

تسمى متجهة موجهة للمستقيم (AB)



خاصية

لتكن A نقطة من الفضاء و $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة

مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u}$ و $\alpha \in \mathbb{R}$

هي المستقيم المار من A و الموجه بـ $\vec{u}$. نرمز له بالرمز $D(A;\vec{u})$

$$D(A;\vec{u}) = \{M \in (E) / \overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R}\}$$

تمرين

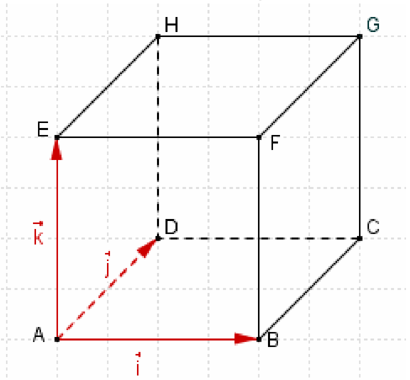
ليكن $ABCDEFGH$ مكعبا نضع $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$ و $\overrightarrow{AD} = \vec{j}$

و $\overrightarrow{AE} = \vec{k}$ و $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$. نعتبر I منتصف $[HG]$

1- بين أن $\vec{u}$ موجهة للمستقيم (AI)

2- ليكن المستقيم (Δ) المار من G و الموازي للمستقيم (AI) و M نقطة من الفضاء حيث

$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BG}$. بين أن $M \in (\Delta)$



الجواب

1- نبين أن $\vec{u}$ موجهة للمستقيم (AI)

أي نبين أن $\overrightarrow{AI}$ و $\vec{u}$ مستقيميتين

لدينا I منتصف $[HG]$ ومنه $\overrightarrow{HI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HG}$

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HI} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HG}$$

بما أن $ABCDEFGH$ مكعب فان $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD} = \vec{j}$ و $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AB} = \vec{i}$

ومنه $\overrightarrow{AI} = \vec{k} + \vec{j} + \frac{1}{2}\vec{i} = \frac{1}{2}(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}) = \frac{1}{2}\vec{u}$

إذن $\overrightarrow{AI}$ و $\vec{u}$ مستقيميتان و منه $\vec{u}$ موجهة للمستقيم (AI)

2 نبين أن $M \in (\Delta)$

لدينا (Δ) المار من G و الموازي للمستقيم (AI) أي $(\Delta) = D(G;\vec{u})$

$$\overrightarrow{GM}=\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{CG}$$

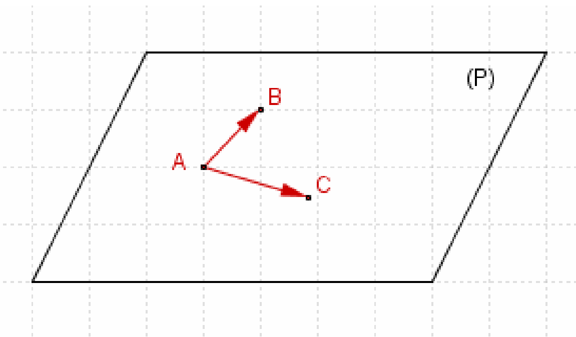
بما أن $ABCDEFGH$ مكعب فان $\overrightarrow{GF}=-\overrightarrow{AD}=-\vec{j}$ و $\overrightarrow{FB}=-\overrightarrow{AE}=-\vec{k}$ و $\overrightarrow{CG}=\vec{k}$ و $\overrightarrow{BC}=\vec{j}$

$$\overrightarrow{GM}=-\vec{j}-\vec{k}+\frac{1}{2}i+2\vec{j}+2\vec{k}=\frac{1}{2}\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}=\frac{1}{2}\left(\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}\right)=\frac{1}{2}\vec{u}$$

و بالتالي $M\in D(G;\vec{u})$ إذن $M\in(\Delta)$

III) الاستوائية– التعريف المتجهي للمستوى

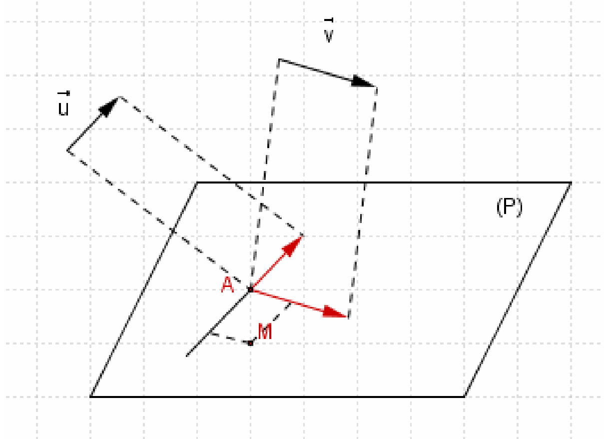
1- تعريف



ليكن (P) مستوى من الفضاء و A و B و C نقط غير مستقيمية من المستوى (P)

نقول إن (P) هو المستوى المار من A و الموجه بالمتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

نتيجة



متجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين و نقطة من الفضاء تحدد مستوى وحيدا (P) هو المستوى المار من النقطة A و الموجه بالمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ نرمز له بالرمز $P(A;\vec{u};\vec{v})$.

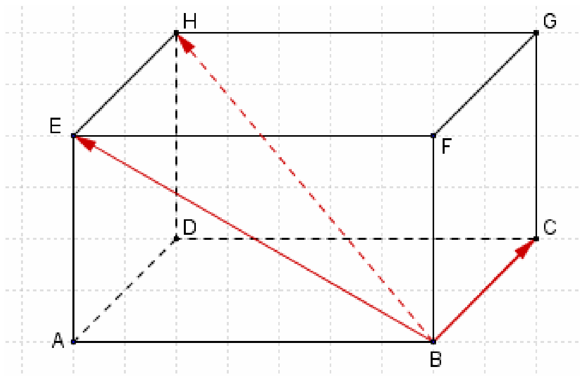
خاصية

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير مستقيميتين و A نقطة من الفضاء.

مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overrightarrow{AM}=x\vec{u}+y\vec{v}$ و $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ هي المستوى (P) المار من A و الموجه بالمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و نكتب $(P)=P(A;\vec{u};\vec{v})$

2- الاستوائية

تعريف



لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث متجهات في الفضاء
نقول إن المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية اذا وفقط وجدت أربع نقط مستوائية A و B و C و D حيث $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ و $\overrightarrow{AD}=\vec{w}$

أمثلة

$ABCDEFGH$ متوازي المستطيلات

$\overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BH}$ مستوائية لان النقط B

و C و E و H مستوائية $\left[(BC)//(EH)\right]$

$\overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{BH}$ و $\overrightarrow{BD}$ غير مستوائية لأن $BDEH$ رباعي الأوجه

خاصية

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير مستقيميتين و $\vec{w}$ متجهة في الفضاء
المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية إذا وفقط إذا وجد عددين حقيقيين x و y حيث
$\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$

نتيجة

إذا وجد عددين حقيقيين x و y حيث $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ فان A و B و C و M مستوائية

تمرين

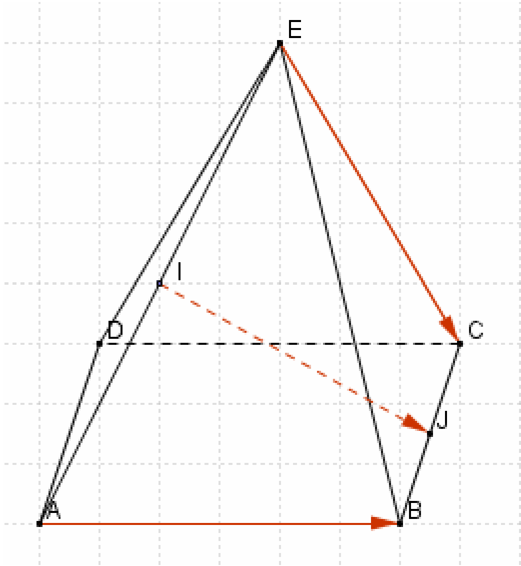
$EABCD$ هرم قاعدته المستطيل $ABCD$، I و J منتصفا $[AE]$ و $[BC]$ على التوالي.

بين أن المتجهات $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{EC}$ مستوائية

الحل

$$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}$$

و حيث I و J منتصفا $[AE]$ و $[BC]$ فان :



$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{IA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA}$

و بالتالي $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

ومنه $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

ومنه $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

إذن $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{EC}$ مستوائية