1) كتابة مجموعة بتفصيل أو بإدراك :

يمكن كتابة مجموعة E بطريقتين مختلفتين :
* بتفصيل و ذلك بجرد جميع عناصرها.
* بإدراك وذلك بتحديد علاقة مميزة لعناصرها.

أمثلة : أ- لتكن D_4 مجموعة القواسم الموجبة للعدد 4 (كتابة D_4 بإدراك و بتفصيل)

ب - لتكن E مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية التي مربعاتها أصغر من أو تساوي 70 (كتابة E بإدراك و بتفصيل)

ملاحظات :

- نرمز للمجموعة الفارغة بالرمز $\varnothing$

- مخطط فان Diagramme de Venn

ليكن I المجال $[1;3[$ ، يمكن التعبير عن المجموعة I بإدراك : $I=\{x\in\mathbb{R}/1\le x<3\}$ و لا يمكن التعبير عنها بتفصيل

تطبيق :

أ - اكتب بإدراك المجموعات التالية :

$A=\{0,1,4,9,16,.....\}$ و $B=\left\{-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{4},......\right\}$ و $C=\{.....,-5,-2,1,4,7,.....\}$ و $D=\{1;3;5;7;........\}$

و $E=\{1;10;100;1000;.......\}$

ب - أكتب بتفصيل المجموعات التالية : $A=\left\{x\in\mathbb{Z}/-\frac{7}{2}\le x\le\frac{5}{2}\right\}$ و $\{x\in\mathbb{R}/x^2+x+1=0\}$

و $\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2/x^2+xy-2y^2=-5\}$

ج- لتكن E المجموعة المعرفة بما يلي : $E=\left\{(x;y)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^* \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}\right\}$

a- بين أن :

$$\forall x;y\in\mathbb{Z}^* \quad (x;y)\in E \Leftrightarrow (x-5)(y-5)=25$$

b- حدد بتفصيل المجموعة E .

2) التضمن - مجموعة اجزاء مجموعة – التساوي :

أ- التضمن :

تعريف :

A و B جزءان من مجموعة E .
نقول إن " A ضمن B " أو " B يتضمن A " و نكتب $A\subset B$ ، إذا كان كل عنصر من A ينتمي إلى B .
و بتعبير آخر : $A\subset B\Leftrightarrow[\forall x\in E,\ x\in A\Rightarrow x\in B]$ (مخطط فان)

ملاحظة : ليكن A و B جزءين من مجموعة غير فارغة E .
A ليست ضمن B تكافئ أنه يوجد على الأقل عنصر x من E بحيث $x\in A$ و $x\notin B$ و نكتب : $A\not\subset B$.
و بصيغة أخرى : $A\not\subset B\Leftrightarrow[(\exists x\in E):x\in A\wedge x\notin B]$

أمثلة : 1- لكل مجموعة E لدينا : $E\subset E$ و $\varnothing\subset E$

2- $[-3,7]\subset\mathbb{R}$ و $]-1,+\infty[\subset\mathbb{R}$ و $\{-2,-1,0,1,2,3\}\subset\mathbb{Z}$ و $\{-1,0,1,2\}\not\subset\mathbb{N}$

خاصية :

لتكن A و B و C ثلاثة أجزاء من مجموعة E . إذا كان $A\subset B$ و $B\subset C$ فإن $A\subset C$

و بتعبير آخر : $\begin{cases}A\subset B\\ B\subset C\end{cases}\Rightarrow A\subset C$

برهان

ملاحظة : يمكن كتابة $A\subset B$ و $B\subset C$ على الشكل $A\subset B\subset C$ مثلا : $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{R}$

ب ـ التساوي :

تعريف :

A و B جزءان من مجموعة E .
نقول إن A و B متساوان و نكتب $A=B$ إذا و فقط إذا كان $A\subset B$ و $B\subset A$.
و بصيغة أخرى : $A=B\Leftrightarrow(A\subset B$ و $B\subset A)$

$$A=B\Leftrightarrow\left[(\forall x\in E):x\in A\Leftrightarrow x\in B\right]$$

نتيجة : $A\neq B\Leftrightarrow\left[A\not\subset B\right.$ أو $\left.B\not\subset A\right]$

مثال : نعتبر المجموعتين A و B بحيث $A=\{x\in\mathbb{R}/|x-2|\leq 3\}$ و $B=[-1,5]$. لنبين أن $A=B$

تطبيق : نضع : $E=\left\{x\in\mathbb{R}/-\frac{1}{2}<\frac{x}{x^2+4}<\frac{1}{2}\right\}$ و $F=\mathbb{R}$
بين أن : $E=F$

ج ـ المتممة :

تعريف :

ليكن A جزءا من مجموعة E.
متممة A في E هي مجموعة العناصر التي تنتمي إلى E و لا تنتمي إلى A و يرمز لها بـ : C_E^A أو $\overline{A}$.
لدينا : $\overline{A}=C_E^A=\{x\in E/x\notin A\}$
و بصيغة أخرى : $x\in\overline{A}\Leftrightarrow x\notin A$

أمثلة : $C_{\mathbb{R}}^{\{0\}}=\mathbb{R}^*$ و $C_{\mathbb{R}}^{]-1,3]}=]-\infty,-1]\cup]3,+\infty[$ و $C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}^*}=\mathbb{Z}^-$

تطبيق :

لتكن $A=\{x\in\mathbb{N}/x^2-4x>0\}$ ، اكتب بتفصيل المجموعة $C_{\mathbb{N}}^A$

خاصيات :

ليكن A و B جزءين من مجموعة E.
لدينا : 1) $C_E^E=\varnothing$ • $C_E^{\varnothing}=E$ • $\overline{(\overline{A})}=A$ •
2) $A\subset B\Leftrightarrow\overline{B}\subset\overline{A}$

برهان

د ـ مجموعة اجزاء مجموعة :

تعريف :

لتكن E مجموعة.
جميع أجزاء E تكون مجموعة نرمز لها بالرمز $\Im(E)$ و تسمى مجموعة أجزاء E.
و بصيغة أخرى : $A\in\Im(E)\Leftrightarrow A\subset E$

أمثلة :

ملاحظة : • $a\in E\Leftrightarrow\{a\}\in\Im(E)$ • $\varnothing\in\Im(E)$; $E\in\Im(E)$

تطبيق : لتكن E و F مجموعتين بين أن $(E\subset F)\Leftrightarrow(\Im(E)\subset\Im(F))$

3)العمليات في $\Im(E)$:

أ ـ التقاطع :

تعريف :

ليكن A و B جزءين من مجموعة E.
تقاطع المجموعتين A و B هو المجموعة المكونة من العناصر التي تنتمي إلى A و B و يرمز لها بالرمز $A \cap B$
و بصيغة اخرى : $A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ و } x \in B\}$
أي $x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \text{ و } x \in B)$

تمثيل التقاطع بواسطة مخطط Venn

أمثلة :

تطبيق 1 : لتكن $A = \{x \in \mathbb{R} / |x-1| < 3\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z} / x \leq 3\}$ حدد بتفصيل المجموعة $A \cap B$

تطبيق 2 : نعتبر المجموعتين : $A = \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{5} / k \in \mathbb{Z}\right\}$ و $B\left\{\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{5} / k \in \mathbb{Z}\right\}$
بين أن : $A \cap B = \varnothing$

تطبيق 3 : ليكن A و B جزءين من مجموعة E. بين أن $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$

خاصيات :

لتكن A و B و C ثلاثة أجزاء من مجموعة E . لدينا الخاصيات التالية :
1) $A \cap B \subset A$ و $A \cap B \subset B$
2) $A \cap B = B \cap A$ و $A \cap \varnothing = \varnothing$ و $A \cap A = A$
3) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ لذلك نكتب $A \cap B \cap C$
4) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$

لنبرهن على 4

ب ـ الاتحاد :

تعريف :

ليكن A و B جزءين من مجموعة E.
اتحاد المجموعتين A و B هو المجموعة المكونة من العناصر التي تنتمي إلى A و العناصر التي تنتمي إلى B
ويرمز لها بالرمز $A \cup B$
و بصيغة اخرى : $A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ أو } x \in B\}$
أي $x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \text{ أو } x \in B)$

أمثلة :

تطبيق : لتكن $A = \{x \in \mathbb{N} / x^2 < 19\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z} / |x+3| \leq 5\}$ حدد بتفصيل المجموعة $A \cup B$

خاصيات :

لتكن A و B و C ثلاثة أجزاء من مجموعة E . لدينا الخاصيات التالية :
1) $A \subset A \cup B$ و $B \subset A \cup B$ و $A \cap B \subset A \cup B$
2) $A \cup A = A$ و $A \cup \varnothing = A$ و $A \cup B = B \cup A$ و $A \cup \overline{A} = E$
3) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ لذلك نكتب $A \cup B \cup C$
4) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$

لنبرهن على الخاصية 4

خاصيات التقاطع و الاتحاد :

خاصية1 :

لتكن A و B و C ثلاثة أجزاء من مجموعة E .

(1 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(2 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

(3 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

(4 $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

برهان

خاصية 2 : قانونا موركان : Lois de Morgan

ليكن A و B جزءين من مجموعة E.

لدينا : (1 $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

(2 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

برهان

ترميز : إذا كانت A_1 ، A_2 ، .... و A_n أجزاء من نفس المجموعة E نضع :

$$A_1\cap A_2\cap\ldots\ldots\cap A_n=\bigcap_{i=1}^{n}A_i \quad \text{و} \quad A_1\cup A_2\cup\ldots\ldots\cup A_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$$

تطبيق 1 : لتكن A و B و C ثلاثة أجزاء من مجموعة E .

1) بين أن : $A\cap\big(B\cup(A\cap C)\big)=A\cap(B\cup C)$

2) بين أن : $A\cup\big(B\cap(A\cup C)\big)=A\cup(B\cap C)$

3) بسط كتابة المجموعات التالية :

$$A\cup(\overline{A}\cap B)\ ;\ A\cap(A\cap B)\ ;\ A\cap(A\cup B)$$

$$(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})\ ;\ (A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$$

$$\overline{(A\cap B)}\cup\overline{(B\cap A)}\ ;\ \overline{(A\cup B)}\cap\overline{(B\cup A)}$$

تطبيق 2 : لتكن A و B و C ثلاثة أجزاء من مجموعة E .

بين أن العبارات التالية صحيحة :

$$(1)\quad (A\cap B=A\cap C)\Leftrightarrow(A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C})$$

$$(2)\quad \begin{pmatrix}A\cup B\subset A\cup C\\ A\cap B\subset A\cap C\end{pmatrix}\Rightarrow(B\subset C)$$

$$(3)\quad \left.\begin{matrix}A\cap B=A\cup C\\ A\cup B=A\cap C\end{matrix}\right\}\Rightarrow A=B=C$$

4) فرق مجموعتين :

تعريف :

ليكن A و B جزءين من مجموعة E.

نسمي فرق A و B في هذا الترتيب المجموعة المكونة من العناصر التي تنتمي إلى A و لا تنتمي إلى B.

و يرمز لها بـ $A-B$ أو $A\setminus B$

و نكتب : $A\setminus B=\{x\in E\,/\,x\in A$ و $x\notin B\}$

لدينا : $\in A\ \ x\setminus B\ \Leftrightarrow(x\in A$ و $x\notin B)$

و بالتالي $A\setminus B=A\cap\overline{B}$

أمثلة :

1) نعتبر المجموعتين $A=\{-2;-1;0;1;2;3;4;5;6\}$ و $B=\{-9;-8;0;2;5;8;9;10\}$. لنحدد $A\setminus B$ و $B\setminus A$

2) نعتبر المجالين $I=[-2;4]$ و $J=[1;7[$. لنحدد $J\setminus I$ و $I\setminus J$

ملاحظة :

إذا كان $A\subset B$ فإن $A\setminus B=\varnothing$ و $B\setminus A=C_B^A$

خاصية :

ليكن A و B جزءين من مجموعة E.

لدينا : 1) $A\setminus B=A\cap C_E^B=A\cap\overline{B}$

2) $A=(A\setminus B)\cup(A\cap B)$

برهان :

5) الفرق التماثلي :

تعريف : ليكن A و B جزءين من مجموعة غير فارغة E.

الفرق التماثلي لـ A و B هو المجموعة التي نرمز لها بالرمز $A\Delta B$ و المعرفة كالآتي :

$$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$$

و بالتالي

$$(x\in A\Delta B)\Leftrightarrow\left[(x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in B)\wedge(x\notin A)\right]$$

ملاحظة : لدينا $A\Delta B=B\Delta A$

خاصية : ليكن A و B جزءين من مجموعة غير فارغة E.

لدينا $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$

تطبيقات متنوعة : لتكن A و B و C ثلاثة أجزاء من مجموعة E. بين أن :

1) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

2) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$

3) $\left.\begin{array}{l}A\cap B=A\cap C\\ B\setminus A=C\setminus A\end{array}\right\}\Rightarrow B=C$

4) $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

5) الجداء الديكارتي :

تعريف :

لتكن E و F مجموعتين.

الجداء الديكارتي $E\times F$ للمجموعتين E و F هو مجموعة الأزواج $(x;y)$ حيث $x\in E$ و $y\in F$.

لدينا $E\times F=\{(x;y)/x\in E\wedge y\in F\}$

و $(x;y)\in E\times F\Leftrightarrow(x\in E\wedge y\in F)$

أمثلة :

ملاحظات :

- إذا كان $E=F$ فإن الجداء الديكارتي $E\times E$ يكتب E^2 و يسمى المربع الديكارتي للمجموعة E.
  و لدينا : $E\times E=\{(x;y)/x\in E\wedge y\in E\}$
- لتكن E و F مجموعتين. لدينا : $E\times F=\varnothing\Leftrightarrow(E=\varnothing\vee F=\varnothing)$
- على العموم لدينا : $E\times F\neq F\times E$
- لكل عنصرين $(a;b)$ و $(x;y)$ من $E\times E$ لدينا : $(a;b)=(x;y)\Leftrightarrow(a=x$ و $b=y)$

تعميم : الجداء الديكارتي للمجموعات E_1 ، E_2 ، .... و E_n هي المجموعة التي نرمز لها بالرمز $\prod_{k=1}^{n} E_k = E_1 \times E_2 \times ......\times E_n$ و هي مجموعة العناصر $(a_1;a_2;.......;a_n)$ حيث : $a_1 \in E_1$ و $a_2 \in E_2$ و .... و $a_n \in E_n$

المخطط الديكارتي :

مثال : نعتبر المجموعتين $E = \{1;2;3;4\}$ و $F = \{a;b;c\}$

الجداء الديكارتي $E \times F$ يمكن تمثيله هندسيا باستعمال المخطط التالي :

تطبيقات :

1- ليكن A و B جزءين من مجموعة E . بين أن $C_{E\times E}^{A\times B} = \left(C_E^A \times E\right) \cup \left(E \times C_E^B\right)$.

2- نعتبر المجموعات : $A = \{1;2;3\}$ و $B = \{a;b\}$ و $C = \{c;d\}$

i. حدد المجموعة $(A\times B)\cup(A\times C)$

ii. حدد المجموعة $A\times(B\cup C)$. ماذا تستنتج ؟

iii. بين هذه النتيجة في الحالة العامة .

3- لتكن E و F مجموعتين غير فارغتين ، ليكن A و B . جزأين من E و C و D جزأين من F .
بين أن $(\mathrm{A}\times\mathrm{C})\cup(\mathrm{B}\times\mathrm{C}) = (\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\times\mathrm{C}$