الأولى علوم رياضية	المتتاليات العددية	الأستاذ : الحيان

I - عموميات :

1. أمثلة تمهيدية :

مثال 1 : أتمم بشكل منطقي ما يلي : $4 \;;\; 8 \;;\; 12 \;;\; 16 \;;\; ... \;;\; ... \;;\; ...$

نقترح تخصيص رمز لكل من هذه الأعداد ؛ لهذا نضع :

$u_2 = 4 \;;\; u_3 = 8 \;;\; u_4 = 12 \;;\; u_5 = 16 \;;\; ...$

فيكون لدينا :

u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	.....
4	8	12	16	20	24	28	32	.....

التطبيق u , الذي يربط كل عنصر n من $I = \{2;3;4;5;...\}$ ؛ I جزء من المجموعة $\mathbb{N}$ ؛ بالعدد الحقيقي u_n , يسمى **متتالية عددية** . أي :

$$u : I \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto u(n) = u_n$$

نرمز أيضا للمتتالية u بالرمز $(u_n)_{n\geq 2}$ أو (u_n) .

الأعداد الحقيقية u_2 و u_3 و u_4 و ... و u_n و ... تسمى **حدود** المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 2}$.

العدد الصحيح الطبيعي n , يسمى **مدل** الحد u_n .

مثال 2 : لتكن $(\mathscr{V}_n)_{n\geq 0}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $\mathscr{V}_n = n^2$ لكل $n \geq 0$.

1. أحسب $\mathscr{V}_0$ و $\mathscr{V}_1$ و $\mathscr{V}_2$.
2. حدد بدلالة n : $\mathscr{V}_n + 1$ و $\mathscr{V}_{n+1}$ و $\mathscr{V}_{n-1}$ و $\mathscr{V}_n - 1$.

الحد الأول للمتتالية العددية $(\mathscr{V}_n)_{n\geq 0}$ هو $\mathscr{V}_0 = 0$.

$\mathscr{V}_n$: يسمى الحد العام للمتتالية $(\mathscr{V}_n)_{n\geq 0}$.

$\mathscr{V}_{n+1}$: يسمى الحد الموالي للحد العام للمتتالية $(\mathscr{V}_n)_{n\geq 0}$.

$\mathscr{V}_{n-1}$: يسمى الحد السابق للحد العام للمتتالية $(\mathscr{V}_n)_{n\geq 0}$.

2. تعريف :

I جزء غير فارغ من $\mathbb{N}$. كل تطبيق من I نحو $\mathbb{R}$ يسمى متتالية عددية

✓ **مثال 1 :** لتكن $(\mathscr{U}_n)_{n\geq 0}$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad \mathscr{U}_n = \dfrac{n}{n+1}$

1. أحسب $\mathscr{U}_0$ و $\mathscr{U}_1$ و $\mathscr{U}_2$.
2. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad 0 \leq \mathscr{U}_n \leq 1$.

✓ **مثال 2 :** لتكن $(\mathscr{V}_n)_{n\geq 1}$ المتتالية العددية المعرفة كالآتي :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad : \quad \mathscr{V}_{n+1} = 2\mathscr{V}_n + 1 \\ \mathscr{V}_1 = 3 \end{cases}$$

أحسب $\mathscr{V}_2$ و $\mathscr{V}_3$ و $\mathscr{V}_4$.

II- المتتاليات المحدودة : Les suites bornées :

1. تعريف :

ليكن n_0 من $\mathbb{N}$.

a) تكون المتتالية $(\mathscr{U}_n)_{n\geq n_0}$ مكبورة بعدد الحقيقي M , إذا كان : $\forall n \geq n_0 \quad : \quad \mathscr{U}_n \leq M$

b) تكون المتتالية $(\mathscr{U}_n)_{n\geq n_0}$ مصغورة بعدد الحقيقي m , إذا كان: $\forall n \geq n_0 \quad : \quad m \leq \mathscr{U}_n$

c) تكون المتتالية $(\mathscr{U}_n)_{n\geq n_0}$ محدودة , إذا كانت مصغورة ومكبورة ؛ أي :

إذا وجد عددان حقيقيان m و M بحيث : $\forall n \geq n_0 \quad : \quad m \leq \mathscr{U}_n \leq M$

2. مثال : لتكن $(\mathcal{U}_n)$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $\forall n \in \mathbb{N} \;:\; \mathcal{U}_n = \dfrac{5n-2}{3n+4}$

i. بين أن $(\mathcal{U}_n)$ مكبورة بالعدد $\dfrac{5}{3}$.　　ii. بين أن $(\mathcal{U}_n)$ مصغورة بالعدد $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

ملحوظة : تكون $(\mathcal{U}_n)_{n\geq n_0}$ **محدودة**؛ إذا وفقط إذا وجد α من $\mathbb{R}^+$ بحيث : $\forall n \geq n_0 \;:\; |\mathcal{U}_n| \leq \alpha$.

تمرين : لتكن $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $\forall n \in \mathbb{N} \;:\; \mathcal{U}_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

بين أن $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية محدودة .

III- المتتاليات الرتيبة : Les suites monotones :

1. تعريف :

a) تكون المتتالية $(\mathcal{U}_n)_{n\geq n_0}$ تزايدية؛ إذا كان لكل $m \geq n_0$ ولكل $p \geq n_0$: $p < m \Rightarrow \mathcal{U}_p \leq \mathcal{U}_m$

b) تكون المتتالية $(\mathcal{U}_n)_{n\geq n_0}$ تناقصية؛ إذا كان لكل $m \geq n_0$ ولكل $p \geq n_0$: $p < m \Rightarrow \mathcal{U}_p \geq \mathcal{U}_m$

2. ملاحظات :

i. $\forall n \geq n_0 \;:\; \mathcal{U}_n \leq \mathcal{U}_{n+1} \Leftrightarrow (\mathcal{U}_n)_{n\geq n_0}$ تزايدية .

ii. $\forall n \geq n_0 \;:\; \mathcal{U}_n \geq \mathcal{U}_{n+1} \Leftrightarrow (\mathcal{U}_n)_{n\geq n_0}$ تناقصية .

iii. $\forall n \geq n_0 \;:\; \mathcal{U}_n < \mathcal{U}_{n+1} \Leftrightarrow (\mathcal{U}_n)_{n\geq n_0}$ تزايدية قطعا .

iv. $\forall n \geq n_0 \;:\; \mathcal{U}_n > \mathcal{U}_{n+1} \Leftrightarrow (\mathcal{U}_n)_{n\geq n_0}$ تناقصية قطعا .

v. نقول إن $(\mathcal{U}_n)_{n\geq n_0}$ متتالية **رتيبة** ؛ إذا كانت تزايدية أو تناقصية .

مثال : أدرس رتابة المتتالية $(\mathcal{V}_n)$ في كلتا الحالتين : a. $\mathcal{V}_n = \dfrac{1}{n}$ ؛ b. $\mathcal{V}_n = 2 + \dfrac{3}{n^2+1}$.

IV- المتتاليات الحسابية : Les suites arithmétiques :

1. مثال 1:

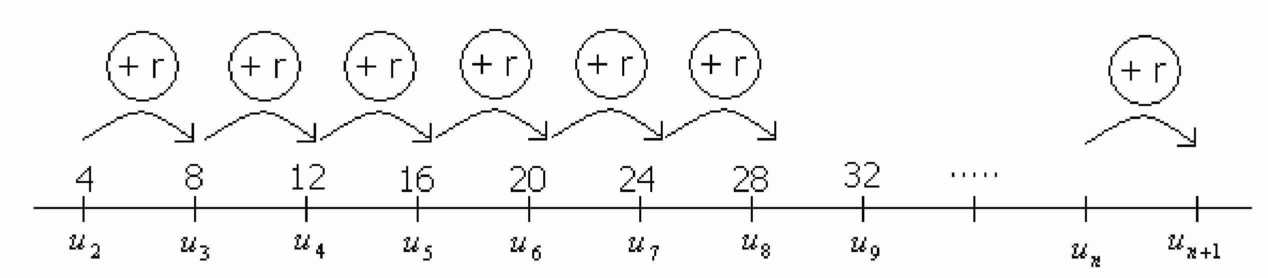
a) أتمم بشكل منطقي الجدول التالي:

b) أوجد العلاقة بين u_n و u_{n+1} .

u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	.....
4	8	12	16	20				.....

c) أ. أحسب u_{50} .

ب. أكتب u_n بدلالة n و u_0 و r ؛ (حيث : $r = u_{n+1} - u_n$)



المرور من حد u_n إلى الحد u_{n+1} يتم بإضافة العدد r ، حيث $r = 4$:

u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	.....
4	8	12	16	20	24	28	32	.....

2. تعريف :

تكون $(\mathcal{U}_n)_{n\geq n_0}$ متتالية حسابية ؛ إذا وجد عدد حقيقي r (غير مرتبط ب n) بحيث :

$$\forall n \geq n_0 \quad : \quad \mathcal{U}_{n+1} = \mathcal{U}_n + r$$

العدد الحقيقي r ؛ يسمى أساس المتتالية الحسابية $(\mathcal{U}_n)_{n\geq n_0}$.

مثال : المتتالية العددية $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 2}$ المعرفة في المثال السابق هي متتالية حسابية حدها الأول $\mathcal{U}_2 = 4$ وأساسها $r = 4$. ونكتب :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_2 = 4 \\ \mathcal{U}_{n+1} = \mathcal{U}_n + 4 \quad ; \quad n \geq 2 \end{cases}$$

3. صيغة الحد العام :

خاصية :

إذا كانت $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r ؛ فإن :

$\boxed{\mathcal{U}_n = \mathcal{U}_0 + n.r}$ ؛ ولدينا كذلك : $\boxed{\mathcal{U}_n = \mathcal{U}_1 + (n-1).r}$ ؛ وبصفة عامة : $\boxed{\mathcal{U}_n = \mathcal{U}_p + (n-p).r}$

4. مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية :

قاعدة :

عدد الحدود $\mathcal{U}_p$ ؛ $\mathcal{U}_{p+1}$ ؛ ... ؛ $\mathcal{U}_{n-1}$ ؛ $\mathcal{U}_n$ هو : $\boxed{n - p + 1}$

أكبر مدل − أصغر مدل + 1

خاصية :

لتكن $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية حدها الأول $\mathcal{U}_0$ وأساسها r . نضع : $S = \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 + ... + \mathcal{U}_{n-1}$

لدينا :

$$S = \frac{n}{2}\left(\mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_{n-1}\right)$$

مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية $=$ $\dfrac{\text{(الحد الأخير للمجموع + الحد الأول للمجموع) × عدد الحدود}}{2}$

مثال : لتكن $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية حدها الأول $\mathcal{U}_0 = 600$ وأساسها $r = -4$.

i. أحسب : $\mathcal{U}_1$ و $\mathcal{U}_2$ و $\mathcal{U}_3$.

ii. حدد $\mathcal{U}_n$ بدلالة n ؛ ثم استنتج $\mathcal{U}_{100}$.

iii. أحسب المجموع : $A = \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 + ... + \mathcal{U}_{100}$.

iv. حدد بدلالة n ؛ المجموع : $B = \mathcal{U}_3 + \mathcal{U}_4 + ... + \mathcal{U}_n$.

5. شرط تتابع ثلاثة حدود من متتالية حسابية : $\quad ...; a ; b ; c ; ..$

خاصية :

تكون الأعداد a و b و c ؛ في هذا الترتيب ؛ حدودا متتابعة من متتالية حسابية

إذا وفقط إذا كان :

$$b = \frac{a+c}{2}$$

6. تمرين تطبيقي :

لتكن $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 0 \quad ; \quad \mathcal{U}_1 = 1 \\ \mathcal{U}_{n+2} = \dfrac{2}{3}\mathcal{U}_{n+1} - \dfrac{1}{9}\mathcal{U}_n \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. أحسب $\mathcal{U}_2$ و $\mathcal{U}_3$ و $\mathcal{U}_4$.
2. لتكن $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $\mathcal{V}_n = 3^n.\mathcal{U}_n \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

أ- بين أن $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية محددا أساسها وحدها الأول .

ب- أكتب تعبير $\mathcal{V}_n$ بدلالة n ، ثم استنتج تعبير $\mathcal{U}_n$ بدلالة n .

V- المتتاليات الهندسية :

1. مثال :

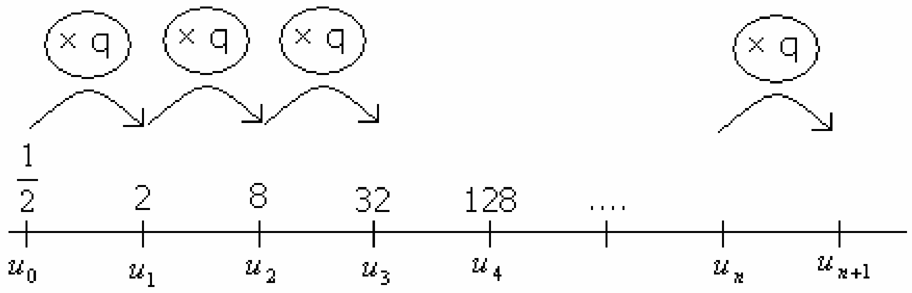
u_0	u_1	u_2	u_3	....	....
$\frac{1}{2}$	2	8	32	....	....

a. أتمم بشكل منطقي الجدول التالي :

b. أوجد العلاقة بين u_n و u_{n+1} .

c. أ. حدد u_{50} .

ب. حدد u_n بدلالة n و u_0 و q (q بحيث $u_{n+1} = qu_n$) .



2. تعريف :

تكون $(\mathscr{U}_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية ؛ إذا وجد عدد حقيقي q (غير مرتبط ب n) بحيث :

$$\boxed{\forall n \geq n_0 \quad : \quad \mathscr{U}_{n+1} = q\mathscr{U}_n}$$

العدد الحقيقي q ؛ يسمى أساس المتتالية الهندسية $(\mathscr{U}_n)_{n\geq n_0}$.

مثال : المتتالية العددية $(\mathscr{U}_n)_{n\geq 0}$ المعرفة في المثال السابق ؛ متتالية هندسية حدها الأول $\mathscr{U}_0 = \frac{1}{2}$

وأساسها $q = 4$ ، ونكتب :

$$\begin{cases} \mathscr{U}_0 = \dfrac{1}{2} \\ \mathscr{U}_{n+1} = 4\mathscr{U}_n \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

3. صيغة الحد العام لمتتالية هندسية :

خاصية :

إذا كانت $(\mathscr{U}_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول $\mathscr{U}_0$ ؛ فإن :

$\boxed{\mathscr{U}_n = q^n.\mathscr{U}_0}$ ؛ ولدينا كذلك : $\boxed{\mathscr{U}_n = q^{n-1}.\mathscr{U}_1}$ ؛ وبصفة عامة : $\boxed{\mathscr{U}_n = q^{n-m}.\mathscr{U}_m}$

4. مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية :

خاصية :

لتكن $(\mathscr{U}_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول $\mathscr{U}_0$. نضع : $S = \mathscr{U}_0 + \mathscr{U}_1 + ... + \mathscr{U}_{n-1}$

✓ إذاكان $q = 1$ ؛ فإن : $\boxed{S = n.\mathscr{U}_0}$. أي : $S =$ الحد الأول للمجموع×عدد الحدود

✓ إذاكان $q \neq 1$ ؛ فإن : $\boxed{S = \mathscr{U}_0 \times \left(\dfrac{q^n - 1}{q - 1}\right)}$

مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية = الحد الأول للمجموع × $\dfrac{1 - \text{أساس}^{\text{عدد الحدود}}}{1 - \text{أساس}}$

مثال : لتكن $(\mathscr{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $q = 2$ وحدها الأول $\mathscr{V}_0 = \frac{1}{16}$.

i. أحسب : $\mathscr{V}_1$ و $\mathscr{V}_2$ و $\mathscr{V}_3$.

ii. حدد $\mathscr{V}_n$ بدلالة n ؛ ثم استنتج $\mathscr{V}_{14}$.

iii. حدد بدلالة n ؛ المجموع التالي : $A_n = \mathscr{U}_2 + \mathscr{U}_3 + \ldots + \mathscr{U}_{n+3}$.

5. شرط تتابع ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية : $\ldots ; a ; b ; c ; \ldots$

خاصية :

تكون الأعداد a و b و c (في هذا الترتيب) حدودا متتابعة من متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان : $\boxed{b^2 = ac}$

6. تمارين تطبيقية :

تمرين 1 : لتكن $(\mathscr{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $\begin{cases} \mathscr{U}_0 = 0 \quad ; \quad \mathscr{U}_1 = 1 \\ \mathscr{U}_{n+2} = 3\mathscr{U}_{n+1} - 2\mathscr{U}_n \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. أحسب $\mathscr{U}_2$ و $\mathscr{U}_3$ و $\mathscr{U}_4$.
2. لتكن $(\mathscr{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $\mathscr{V}_n = \mathscr{U}_{n+1} - \mathscr{U}_n \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
   - أ- بين أن $(\mathscr{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية محددا أساسها وحدها الأول .
   - ب- أكتب تعبير $\mathscr{V}_n$ بدلالة n .
   - جـ- ليكن n من $\mathbb{N}^*$. أحسب المجموع $S_n = \mathscr{V}_0 + \mathscr{V}_1 + \ldots + \mathscr{V}_{n-1}$ بدلالة n .
   - د- استنتج تعبير $\mathscr{U}_n$ بدلالة n .

تمرين 2 : لتكن $(\mathscr{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $\begin{cases} \mathscr{U}_0 = 0 \quad ; \quad \mathscr{U}_1 = 1 \\ \mathscr{U}_{n+2} = \frac{2}{3}\mathscr{U}_{n+1} - \frac{1}{9}\mathscr{U}_n \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. أحسب $\mathscr{U}_2$ و $\mathscr{U}_3$ و $\mathscr{U}_4$.
2. لتكن $(\mathscr{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $\mathscr{V}_n = \mathscr{U}_{n+1} - \frac{1}{3}\mathscr{U}_n \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
   - أ- بين أن $(\mathscr{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية محددا أساسها وحدها الأول .
   - ب- أكتب تعبير $\mathscr{V}_n$ بدلالة n ، ثم استنتج تعبير $\mathscr{U}_n$ بدلالة n .

تمرين 3 : لتكن $(\mathscr{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $\begin{cases} \mathscr{U}_0 = 0 \\ \mathscr{U}_{n+1} = \dfrac{2\mathscr{U}_n + 3}{4 + \mathscr{U}_n} \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. أحسب $\mathscr{U}_1$ و $\mathscr{U}_2$ و $\mathscr{U}_3$.
2. لتكن $(\mathscr{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $\mathscr{V}_n = \dfrac{\mathscr{U}_n - 1}{\mathscr{U}_n + 3} \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
   - أ- أحسب $\mathscr{V}_0$ و $\mathscr{V}_1$ و $\mathscr{V}_2$.
   - ب- بين أن : $0 < \mathscr{U}_n < 1 \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.
   - جـ- بين أن $(\mathscr{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تزايدية .
   - د- بين أن $(\mathscr{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية محددا أساسها وحدها الأول .
   - هـ- أكتب تعبير $\mathscr{V}_n$ بدلالة n ، ثم استنتج تعبير $\mathscr{U}_n$ بدلالة n .

تمرين 4 : نعتبر $(\mathscr{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $\begin{cases} \mathscr{U}_0 = 2 \\ \mathscr{U}_{n+1} = 2\mathscr{U}_n - 3 \quad , \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$

و $(\mathscr{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي : $\mathscr{V}_n = \mathscr{U}_n - 3 \quad : \forall n \in \mathbb{N}$.

1. حدد طبيعة المتتالية العددية $(\mathscr{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2. حدد $\mathscr{V}_n$ بدلالة n ؛ ثم استنتج $\mathscr{U}_n$ بدلالة n .
3. حدد؛ بدلالة n ؛ المجموع : $S_n = \mathscr{U}_1 + \mathscr{U}_2 + \ldots + \mathscr{U}_n$