نهاية دالة

1- النهاية المنتهية

تعريف 1

f دالة عددية معرفة على مجال منقط مركزه 0 .نقول إن الدالة f تؤول إلى الصفر لما تؤول x إلى الصفر و نكتب 0 $\lim_{x\to 0} f(x)=0$.

إذا وفقط إذا كان : $\forall \varepsilon>0;\exists \alpha>0:|x|<\alpha \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon$.

تطبيق f دالة عددية معرفة بما يلي : $f(x)=3x^2\sin\frac{1}{x^2}$.

بين أن : $\forall x\in]-1;1[-\{0\}:|f(x)|\le 3|x|$ و استنتج أن $\lim_{x\to 0} f(x)=0$.

نتائج - $\forall n\in\mathbb{N}^*;\forall a\in\mathbb{R}:\lim_{x\to 0} ax^n=0\ ;\ \lim_{x\to 0} a\sqrt{|x|}=0$.

- إذا كان $|f(x)|\le u(x)$ على مجال منقط مركزه 0 بحيث $\lim_{x\to 0} u(x)=0$ فإن $\lim_{x\to 0} f(x)=0$.

تطبيق f دالة عددية معرفة بما يلي : $f(x)=x^2\cos\frac{1}{x}$.

بين أن $\forall x\in\mathbb{R}^*:|f(x)|\le x^2$ واستنتج $\lim_{x\to 0} f(x)$.

تعريف 2

f دالة عددية معرفة على مجال منقط مركزه 0 . $\lim_{x\to 0} f(x)=l\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x)-l=0$.

$\lim_{x\to 0} f(x)=l\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0;\exists\alpha>0:|x|<\alpha\Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$.

تطبيق f دالة عددية معرفة بما يلي : $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$.

بين أن $\forall x\in\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[:|f(x)+1|<4|x|$ و استنتج أن $\lim_{x\to 0} f(x)=-1$.

تعريف 3

f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه a .

$\lim_{x\to a} f(x)=l\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0;\exists\alpha>0:|x-a|<\alpha\Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$.

خاصية إذا كان $|f(x)-l|\le u(x)$ على مجال منقط مركزه a بحيث $\lim_{x\to a} u(x)=0$ فإن $\lim_{x\to a} f(x)=l$.

تطبيق 1 لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي $f(x)=3x^2-2x+1$.

1- بين أن $\forall x\in]0;2[:|f(x)-2|\le 7|x-1|$.

2- استنتج باستعمال التعريف أن $\lim_{x\to 1} f(x)=2$.

تطبيق2 لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي $f(x)=\frac{x-1}{2x+1}$.

1- حدد عددا حقيقيا موجبا قطعا k بحيث : $|x+1|\le\frac{1}{3}\Rightarrow |f(x)-2|\le k|x+1|$.

2- استنتج باستعمال التعريف $\lim_{x\to -1} f(x)$.

نهاية على اليمين – نهاية على اليسار

❖ f دالة عددية معرفة على مجال من الشكل $]a;a+\alpha[$.نهاية الدالة f لما تؤول x إلى a على اليمين نرمز له بالرمز $\lim_{x\to a^+} f(x)$ أو $\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$.ولدينا $\lim_{x\to a^+} f(x)=l\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0;\exists\alpha>0:x\in]a;a+\alpha[\Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$.

❖ f دالة عددية معرفة على مجال من الشكل $]a-\alpha;a[$.نهاية الدالة f لما تؤول x إلى a على اليسار نرمز له بالرمز $\lim_{x\to a^-} f(x)$ أو $\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$.ولدينا $\lim_{x\to a^-} f(x)=l\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0;\exists\alpha>0:x\in]a-\alpha;a[\Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$.

❖ f تقبل نهاية في a $\Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$.

تطبيق أحسب نهاية الدالة f على يمين وعلى يسار a في الحالات

-1 $f(x) = \dfrac{|x^2+x-2|}{x-1}$ $(a=1)$.

-2 $f(x) = \dfrac{E(x)}{x}$ $(a=-2)$.

نهاية منتهية عند $+\infty$

تعريف f دالة عددية معرفة على مجال من الشكل $]a;+\infty[$. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0; \exists A>0 : x>A \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$.

تطبيق لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$.

-1 بين أنه لكل x من $\mathbb{R}^{*+}$: $|f(x)| \le \dfrac{1}{2x}$.

-2 استنتج باستعمال التعريف أن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

نهاية منتهية عند $-\infty$

تعريف f دالة عددية معرفة على مجال من الشكل $]-\infty;a[$. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0; \exists B<0 : x<B \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$.

خاصيات

- لكل n من $\mathbb{N}^*$ و k من $\mathbb{R}$ لدينا $\lim_{x\to\infty} \dfrac{k}{x^n} = 0$ و $\lim_{x\to\infty} \dfrac{k}{\sqrt{|x|}} = 0$.
- إذا كان $|f(x)-l| \le u(x)$ و $\lim_{x\to\infty} u(x) = 0$ فإن $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$.

نهاية الدوال المثلثية $\lim_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$; $\lim_{x\to0} \dfrac{tgx}{x} = 1$; $\lim_{x\to0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

2-النهاية اللامنتهية

- لكل n من $\mathbb{N}^*$ و k من $\mathbb{R}$ لدينا $\lim_{x\to0} \dfrac{k}{x^n} = \infty$ و $\lim_{x\to0} \dfrac{k}{\sqrt{|x|}} = \infty$.
- $\lim_{x\to\infty} kx^n = \infty$ و $\lim_{x\to+\infty} k\sqrt{x} = \infty$
- إذا كان $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ فإن $\lim_{x\to\infty} \dfrac{k}{f(x)} = 0$ و $\lim_{x\to\infty} k\sqrt{|f(x)|} = \infty$.
- $\lim_{x\to\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = \lim_{x\to\infty} a_n x^n$.
- $\lim_{x\to\infty} \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0}{b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + \dots + b_0} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_p x^p}$.

3- النهايات والترتيب

❖ إذا كان $g<f<h$ وكان $\lim g(x) = \lim h(x) = l$ فإن $\lim f(x) = l$.

❖ إذا كان $f \ge u$ وكان $\lim u(x) = +\infty$ فإن $\lim f(x) = +\infty$.

❖ إذا كان $f \le u$ وكان $\lim u(x) = -\infty$ فإن $\lim f(x) = -\infty$.

تطبيقات أحسب النهايات التالية : $\lim_{x\to0} \dfrac{\sin 5x}{3x}$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{1-2\cos x}{3x-\pi}$; $\lim_{x\to2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2+x-6}$; $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{-3x^3+2x+2}{x^2+x+1}$

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3}-x$; $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{3x^2+2x+5}+x$; $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+4}-x$

$\lim_{x\to2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$; $\lim_{x\to3} \dfrac{\sqrt{x-2}-1}{\sqrt{x+6}-3}$; $\lim_{x\to3} \dfrac{1-2x}{x^2-4x+3}$ $\lim_{x\to1} \dfrac{x^3+2x^2+x-4}{(x-1)^3}$.