درس: المرجح	مستوى الأولى علوم	تحضير الاستاذ : محسن الشرفي Chorfi_mouhsine@yahoo.fr	ثانوية المختار السوسي	المعازيز

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

القدرات المستهدفة

1 – استعمال المرجح في تبسيط تعبير متجهي.
2 – إنشاء مرجح n نقطة $(2 \le n \le 4)$.
3 – إستعمال المرجح لإثبات استقامية ثلاث نقط من المستوى.
4 – إستعمال المرجح لإثبات تقاطع المستقيمات.
5 – إستعمال المرجح في حل مسائل هندسية و فيزيائية .

I – النقطة المتزنة

تعريف : لتكن A نقطة من المستوى (P) و α عدد حقيقي.
الزوج (A,α) يسمى نقطة متزنة . و نقول كذلك أن النقطة A معينة بالمعامل α أو العدد α وزن النقطة A.

II – مرجح نقطتين متزنتين .

نشاط رقم 1

A و B نقطتان مختلفتان.
أ – أنشئ النقطة G بحيث $\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$. (أوجد علاقة بين $\overrightarrow{AG}$ و $\overrightarrow{AB}$)
هل يمكن إنشاء نقطة G بحيث $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ ؟ علل جوابك.
ب – لتكن A و B نقطتين مختلفتين من المستوى و α و β عددين حقيقيين .
حدد علاقة بين α و β لكي يتحقق وجود النقطة G بحيث $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

مبرهنة و تعريف :
لتكن (A,α) و (B,β) نقطتين متزنتين من المستوى (P) بحيث $\alpha+\beta\neq 0$.
توجد نقطة وحيدة G من المستوى (P) بحيث $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.
النقطة G تسمى مرجح النقطتين المتزنتين (A,α) و (B,β).

ملاحظة :
– G مرجح النقطتين (A,α) و (B,β) تحقق العلاقة $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$.
– إذا كان $\alpha+\beta=0$ فإن (A,α) و (B,β) ليس لها مرجح.

تمارين تطبيقية

تمرين رقم 1 :
حدد عددين حقيقيين α و β بحيث تكون النقطة G هي مرجح النقطتين المتزنتين (A,α) و (B,β).
1 – $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=3\overrightarrow{AB}$
2 – $2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{BA}=\vec{0}$
3 – **G مماثلة A بالنسبة للنقطة B .**

تمرين رقم 2 :
حدد موقع النقطة G مرجح النقطتين المتزنتين (A,α) و (B,β) في الحالات التالية :
1 – $(A,2)$ و $(B,1)$
2 – $(A,-1)$ و $(B,2)$
3 – $(A,-3)$ و $(B,-2)$

تمرين رقم 3 :
أنشئ G مرجح النقطتين $(A,-2)$ و $(B,3)$ و G' مرجح النقطتين $(A,2)$ و $(B,1)$.
أكتب $\overrightarrow{GG'}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$.

نشاط رقم 2

ليكن $k\in\mathbb{R}^*$ و G مرجح النقطتين المتزنتين (A,α) و (B,β) بحيث $\alpha+\beta\neq 0$.
بين أن G هو مرجح النقطتين المتزنتين $(A,k\alpha)$ و $(B,k\beta)$

خاصية :
مرجح نقطتين متزنتين لا يتغير بضرب وزنيهما في عدد حقيقي غير منعدم.

تمرين تطبيقي

G مرجح النقطتين المتزنتين (A,α) و (B,β) بحيث $\alpha+\beta\neq 0$.
أوجد العددين الحقيقيين a و b بدلالة α و β بحيث يكون G مرجح النقطتين المتزنتين (A,a) و (B,b) و $a+b=1$.

القدرات المستهدفة

1 – استعمال المرجح في تبسيط تعبير متجهي.
2 – إنشاء مرجح n نقطة $(2 \le n \le 4)$.
3 – إستعمال المرجح لإثبات استقامية ثلاث نقط من المستوى.
4 – إستعمال المرجح لإثبات تقاطع المستقيمات.
5 – إستعمال المرجح في حل مسائل هندسية و فيزيائية .

نـــشـــــاط رقــم 3

لتكن M نقطة من المستوى .

بين أن G مرجح النقطتين المتزنتين (A,α) و (B,β) $\Leftrightarrow$ $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$

مبرهنة:

لتكن A و B نقطتين مختلفتين من المستوى (P) و α و β عددين حقيقيين بحيث $\alpha+\beta\neq 0$.

النقطة G هي مرجح النقطتين المتزنتين (A,α) و (B,β) إذا و فقط إذا كان لكل نقطة M من المستوى (P) : $(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}$

تمارين تطبيقية

تمرين رقم 1 :

ABC مثلث و B' مرجح $(A,-2)$ و $(C,1)$ و A' مرجح $(A,2)$ و $(B,3)$ و C' مرجح $(C,-1)$ و $(B,3)$.

1 – أنشئ الشكل.

2 – بين أن لكل نقطة M من المستوى $-\overrightarrow{MA'}-\overrightarrow{MB'}+2\overrightarrow{MC'}=\vec{0}$.

3 – أستنتج أن النقط A' و B' و C' مستقيمية.

تمرين رقم 2 :

1 – أنشئ I مرجح $(A,2)$ و $(C,1)$ و J مرجح $(A,1)$ و $(B,2)$ و K مرجح $(B,-4)$ و $(C,1)$.

2 – بين ان B مرجح $(K,3)$ و $(C,1)$.

3 – بين ان J منتصف القطعة $[KI]$.

تمرين رقم 3 :

لتكن A و B نقطتين مختلفتين من المستوى (P).

1 – حدد مجموعة النقط M بحيث $\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\|=0$.

2 – حدد مجموعة النقط M بحيث $\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\|=\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\|$.

تعريف:

مركز ثقل نقطتين A و B هو مرجح هاتين النقطتين معينتين بمعاملين متساويين غير منعدمين .

مركز ثقل نقطتين A و B هو منتصف القطعة $[AB]$.

إحداثيتا مرجح نقطتين :

نـــشـــــاط رقــم 4

ليكن G مرجح النقطتين المتزنتين (A,α) و (B,β) .

1 – أكتب $\overrightarrow{AG}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$.

2 – علما ان $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ و $G(x_G,y_G)$ أكتب x_G بدلالة كل من x_A و x_B و y_G بدلالة كل من y_A و y_B .

قاعدة :

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ لتكن النقط $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ و $G(x_G,y_G)$.

إذا كان G هي مرجح النقطتين المتزنتين (A,α) و (B,β) فإن : $x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}$ و $y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}$

تمرين تطبيقي

المستوى (P) منسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

لتكن النقط $A(1,0)$ و $B(0,3)$ و $C(3,7)$ و $D(-1,2)$.

النقطة G مرجح $(A,1)$ و $(C,2)$ و G' مرجح $(B,1)$ و $(D,2)$.

لتكن M و N و P منتصفات القطع $[AB]$ و $[CD]$ و $[GG']$ على التوالي.

1 – أحسب إحداثيات النقط G و G' و M و N و P .

2 – بين أن النقط M و N و P مستقيمية.

III – مرجح ثلاث نقط متزنة

نـــشـــــاط رقــم 5

A و B و C ثلاث نقط مختلفة .

أ – أنشئ النقطة G بحيث $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. (اكتب $\overrightarrow{AG}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$)

هل يمكن إنشاء نقطة G بحيث $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ ؟ علل جوابك.

درس: المرجح	مستوى الأولى علوم	تحضير الاستاذ : محسن الشرفي ثانوية المختار السوسي المعازيز Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

القدرات المستهدفة

1 – استعمال المرجح في تبسيط تعبير متجهي.
2 – إنشاء مرجح n نقطة $(2 \leq n \leq 4)$.
3 – إستعمال المرجح لإثبات استقامية ثلاث نقط من المستوى.
4 – إستعمال المرجح لإثبات تقاطع المستقيمات.
5 – إستعمال المرجح في حل مسائل هندسية و فيزيائية .

ب – لتكن A و B و C ثلاث نقط مختلفة من المستوى و α و β و δ أعداد حقيقية .
حدد علاقة بين α و β و δ لكي يتحقق وجود النقطة G بحيث $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\delta\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

مبرهنة و تعريف :
لتكن (A,α) و (B,β) و (C,δ) ثلاث نقط متزنة من المستوى (P) بحيث $\alpha+\beta+\delta\neq 0$.
توجد نقطة وحيدة G من المستوى (P) بحيث $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\delta\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
النقطة G تسمى مرجح النقط المتزنة (A,α) و (B,β) و (C,δ).

ملاحظة :
– G مرجح النقط (A,α) و (B,β) و (C,δ) تحقق العلاقة $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\delta}\overrightarrow{AB}+\frac{\delta}{\alpha+\beta+\delta}\overrightarrow{AC}$.
– إذا كان $\alpha+\beta+\delta=0$ فإن (A,α) و (B,β) و (C,δ) ليس لها مرجح.

تمرين تطبيقي

1 – حدد أعداد حقيقية α و β و δ بحيث يكون G مرجح النقط (A,α) و (B,β) و (C,δ) في الحالة التالية $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-2\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$
2 – أنشئ G مرجح النقط $(A,2)$ و $(B,-1)$ و $(C,-2)$.
3 – النقطة D هي مرجح النقط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,-1)$ ، حدد طبيعة الرباعي $ACBD$.

نشاط رقم 6

لتكن M نقطة من المستوى .
بين أن G مرجح النقط المتزنة (A,α) و (B,β) و (C,δ) $\Leftrightarrow$ $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\delta\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\delta)\overrightarrow{MG}$

مبرهنة:
لتكن A و B و C ثلاث نقط مختلفة من المستوى (P) و α و β و δ أعداد حقيقية بحيث $\alpha+\beta+\delta\neq 0$.
النقطة G هي مرجح النقط المتزنة (A,α) و (B,β) و (C,δ) إذا و فقط إذا كان لكل نقطة M من المستوى (P) :
$$(\alpha+\beta+\delta)\overrightarrow{MG}=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\delta\overrightarrow{MC}$$

تمرين تطبيقي

1 – نعتبر النقط المختلفة A و B و C ،
و G مرجح النقطتين المتزنتين $(A,2)$ و $(B,-3)$ و H مرجح النقط المتزنة $(A,2)$ و $(B,-3)$ و $(C,-1)$.
أ – أنشئ الشكل.
ب – بين أن H منتصف $[CG]$.
2 – نعتبر النقط المختلفة A و B و C
حدد و أنشئ مجموعة النقط M التي تحقق العلاقة $\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=12$.

تعريف:
مركز ثقل ثلاث نقط A و B و C في المستوى هو مرجح هذه النقط معينة بنفس المعامل غير المنعدم .
بمعنى : G مركز ثقل النقط A و B و C يعني $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

تمرين تطبيقي

ABC و $A'B'C'$ مثلثان. G و G' هما مركزا ثقلهما على التوالي.
بين أن ABC و $A'B'C'$ لهما نفس مركز الثقل $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{GG'}$

إحداثيتا مرجح نقطتين :

نشاط رقم 7

ليكن G مرجح النقط المتزنة (A,α) و (B,β) و (C,δ) .
1 – بين أن $\overrightarrow{OG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\delta}\overrightarrow{OA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta+\delta}\overrightarrow{OB}+\frac{\delta}{\alpha+\beta+\delta}\overrightarrow{OC}$.
2 – علما ان $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ و $G(x_G,y_G)$ إستنتج x_G بدلالة كل من x_A و x_B و x_C و y_G بدلالة كل من y_A و y_B و y_C .

القدرات المستهدفة

1 – استعمال المرجح في تبسيط تعبير متجهي.
2 – إنشاء مرجح n نقطة $(2 \le n \le 4)$.
3 – إستعمال المرجح لإثبات استقامية ثلاث نقط من المستوى.
4 – إستعمال المرجح لإثبات تقاطع المستقيمات.
5 – إستعمال المرجح في حل مسائل هندسية و فيزيائية .

قاعدة :

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ لتكن النقط $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ و $C(x_C,y_C)$ و $G(x_G,y_G)$.

إذا كان G هي مرجح النقطتين المتزنتين (A,α) و (B,β) و (C,δ) فإن : $x_G = \dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\delta x_C}{\alpha+\beta+\delta}$ و $y_G = \dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\delta y_C}{\alpha+\beta+\delta}$

تمرين تطبيقي

1 – نعتبر النقط المختلفة A و B و C ، بحيث $A(-1,1)$ و $B(0,2)$ و $C(2,-3)$.

و G مرجح النقطتين المتزنتين $(A,2)$ و $(B,-3)$ و H مرجح النقط المتزنة $(A,2)$ و $(B,-3)$ و $(C,-1)$.

أ – حدد إحداثيات النقطة G ثم استنتج أن النقط A و B و G مستقيمية .

ب – حدد إحداثيات النقطة H ثم بين أن H منتصف $[CG]$.

III – مرجح أربع نقط متزنة

مبرهنة و تعريف :

لتكن (A,α) و (B,β) و (C,δ) و (D,λ) أربع نقط متزنة من المستوى (P) بحيث $\alpha+\beta+\delta+\lambda \neq 0$.

توجد نقطة وحيدة G من المستوى (P) بحيث $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\delta\overrightarrow{GC}+\lambda\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

النقطة G تسمى مرجح النقط المتزنة (A,α) و (B,β) و (C,δ) و (D,λ).

ملاحظة :

– G مرجح النقط (A,α) و (B,β) و (C,δ) و (D,λ) تحقق العلاقة $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\delta+\lambda}\overrightarrow{AB} + \dfrac{\delta}{\alpha+\beta+\delta+\lambda}\overrightarrow{AC} + \dfrac{\lambda}{\alpha+\beta+\delta+\lambda}\overrightarrow{AD}$.

– إذا كان $\alpha+\beta+\delta+\lambda = 0$ فإن (A,α) و (B,β) و (C,δ) و (D,λ) ليس لها مرجح.

نشاط رقم 8

ليكن G مرجح النقط $(A,1)$ و $(B,-3)$ و $(C,+1)$ و $(D,2)$.

نعتبر M مرجح النقطتين $(A,1)$ و $(B,-3)$.

و N مرجح النقطتين $(C,1)$ و $(D,2)$.

1– أرسم M و N .

2 – بين أن G مرجح النقطتين $(M,-2)$ و $(N,3)$.

3 – استنتج طريقة لإنشاء مرجح أربع نقط متزنة.

خاصية التجميعية

مرجح أربع نقط متزنة هو مرجح مرجحي كل نقطتين منهما معينين بمجموع معاملاتها.

مبرهنة:

لتكن A و B و C و D اربع نقط مختلفة من المستوى (P) و α و β و δ و λ أعداد حقيقية بحيث $\alpha+\beta+\delta+\lambda \neq 0$.

النقطة G هي مرجح النقط المتزنة (A,α) و (B,β) و (C,δ) و (D,λ) إذا و فقط إذا كان لكل نقطة M من المستوى (P) :

$$(\alpha+\beta+\delta+\lambda)\overrightarrow{MG} = \alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\delta\overrightarrow{MC}+\lambda\overrightarrow{MD}$$

تمرين تطبيقي

1 – $ABCD$ متوازي الأضلاع . بين أن مرجح النقط المتزنة $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,2)$ و $(D,1)$ ينتمي إلى (AC) .

2 – $ABCD$ متوازي الأضلاع . بين أن مركزه O هو مركز ثقل النقط A و B و C و D .