درس: الجداء السلمي | مستوى الأولى علوم | تحضير الاستاذ : محسن الشرفي ثانوية المختار السوسي المعازيز
Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

القدرات المستهدفة

ـ التعبير عن توازي و تعامد مستقيمين .
ـ حساب مساحات و قياسات زوايا باستعمال الجداء السلمي.

I ـ الجداء السلمي " تذكير"

نـــشـــــاط رقـــــــم 1

ليكن ABC و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC)

بحيث $AB=2$ و $AC=5$ و $BC=4$ و $BH=1$ و $A\hat{C}B=\frac{\pi}{4}$.

1 ـ أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

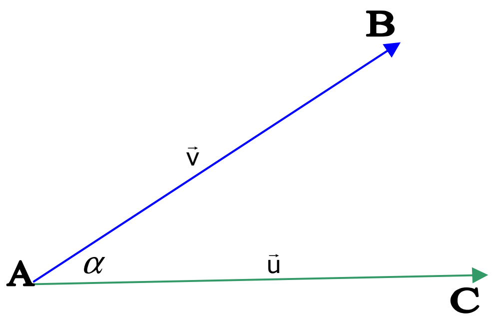
2 ـ أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BH}$.

3 ـ حدد قياسا للزاوية $A\hat{B}H$.

4 ـ أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}$.

1 ـ الصيغة المثلثية للجداء السلمي

تعريف :



$\alpha=B\hat{A}C=(\vec{u},\vec{v})$

- A و B و C ثلاث نقط من المستوى بحيث $A\neq B$ و $A\neq C$.
الجداء السلمي للمتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ هو العدد $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos B\hat{A}C$.

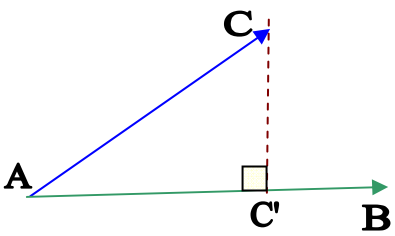
- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين .
الجداء السلمي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$.

ملاحظة :

ـ إذا كانت $\alpha=0$ فإن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC$ و $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$

ـ إذا كانت $\alpha=\pi$ فإن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-AB\times AC$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-AB\times AC$

2 ـ صيغة الإسقاط للجداء السلمي.



$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متجهتين غير منعدمتين في المستوى و C' المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB) .
الجداء السلمي للمتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ هو العدد الحقيقي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ المعرف بـ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}$

خاصية :

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين .
تكون المتجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدتين و نكتب $\vec{u}\perp\vec{v}$ إذا و فقط إذا كان $\vec{u}.\vec{v}=0$.

3 ـ خاصيات الجداء السلمي.

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ متجهات و $k\in\mathbb{R}$.

- $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$
- $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$
- $(k\,\vec{u}).\vec{v}=k.(\vec{u}.\vec{v})$
- $\vec{u}.\vec{u}=\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$

تمرين تطبيقي رقـــــــم 1

1 ـ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان و α قياس الزاوية $(\vec{u},\vec{v})$.

أ ـ أحسب $\vec{u}.\vec{v}$ علما أن $\|\vec{u}\|=3\sqrt{3}$ و $\|\vec{v}\|=\sqrt{3}$ و $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

ب ـ أحسب $\|\vec{u}\|$ علما أن و $\|\vec{v}\|=\sqrt{2}$ و $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}$ و $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

ج ـ أحسب $\cos\alpha$ ثم α علما أن $\|\vec{u}\|=3$ و $\|\vec{v}\|=2$ و $\vec{u}.\vec{v}=3$.

درس: الجداء السلمي	مستوى الأولى علوم	تحضير الاستاذ : محسن الشرفي ثانوية المختار السوسي المعازيز Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

القدرات المستهدفة

ـ التعبير عن توازي و تعامد مستقيمين .

ـ حساب مساحات و قياسات زوايا باستعمال الجداء السلمي.

2 ـ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان بحيث $\vec{u}^2=2$ و $\vec{v}^2=3$ و $\vec{u}.\vec{v}=5$.

أ ـ أحسب $(2\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}+2\vec{v})$

ب ـ بين أن $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$.

II ـ الصيغ التحليلية

1 ـ الجداء السلمي

نشاط رقم 2

نعتبر متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في المستوى (P) المنسوب لمعلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

بحيث $\vec{u}(x,y)$ و $\vec{v}(x',y')$.

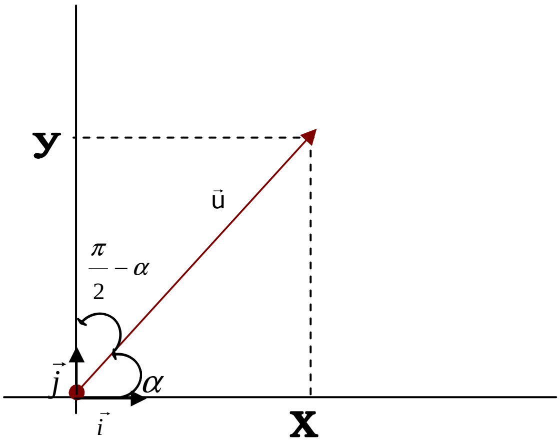
أكتب الجداء السلمي $\vec{u}.\vec{v}$ بدلالة x' و y' و x و y .

خاصية :

المستوى (P) منسوب لمعلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين بحيث $\vec{u}(x,y)$ و $\vec{v}(x',y')$ في الأساس $(\vec{i},\vec{j})$

فإن $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$



2 ـ إحداثيتا متجهة في أساس متعامد ممنظم مباشر.

نشاط رقم 3

نعتبر متجهة $\vec{u}(x,y)$ في أساس متعامد ممنظم $(\vec{i},\vec{j})$.

1 ـ أحسب $\vec{u}.\vec{i}$ و $\vec{u}.\vec{j}$.

2 ـ استنتج قيمة x و y بدلالة α قياس الزاوية $(\vec{i},\vec{u})$.

3 ـ أكتب $\vec{u}$ بدلالة $\cos\alpha$ و $\sin\alpha$.

خاصية :

إذاكان (x,y) هو زوج إحداثيتي متجهة غير منعدمة $\vec{u}$ في أساس متعامد ممنظم مباشر $(\vec{i},\vec{j})$

و α قياس الزاوية $\left(\vec{i},\vec{u}\right)$ فإن $\vec{u}=\|\vec{u}\|(\cos\alpha\vec{i}+\sin\alpha\vec{j})$.

3 ـ منظم متجهة و المسافة بين نقطتين

نشاط رقم 4

نعتبر النقطتين $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ في معلم متعامد ممنظم .

1 ـ حدد إحداثيتي المتجهة $\vec{AB}$.

2 ـ أحسب $\|\vec{AB}\|^2$ ثم استنتج تعبيرا للمسافة AB .

خاصية :

إذا كانت $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ نقطتين في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

و إذا كانت $\vec{u}(x,y)$ في الأساس $(\vec{i},\vec{j})$ فإن :

$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$ و $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

4 ـ حساب $\cos\alpha$ و $\sin\alpha$:

نشاط رقم 5

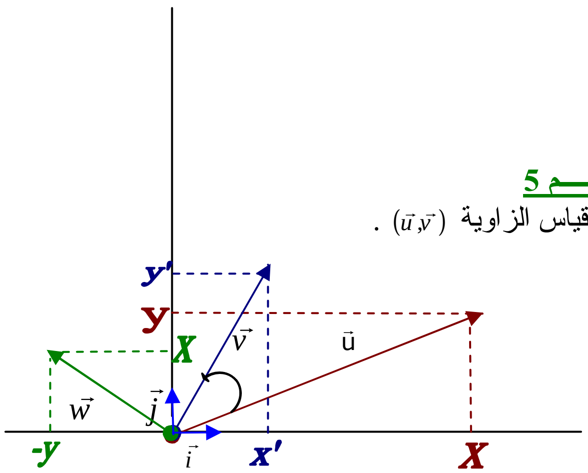
نعتبر المتجهتين $\vec{u}(x,y)$ و $\vec{v}(x',y')$ في أساس متعامد ممنظم مباشر $(\vec{i},\vec{j})$ و α قياس الزاوية $(\vec{u},\vec{v})$.

1 ـ أحسب الجداء السلمي $\vec{u}.\vec{v}$ ثم استنتج $\cos\alpha$ بدلالة $\vec{u}.\vec{v}$ و $\|\vec{u}\|$ و $\|\vec{v}\|$.

2 ـ نعتبر المتجهة $\vec{w}$ بحيث $(\vec{u},\vec{w})=\frac{\pi}{2}$ و $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$.

أ ـ أحسب $\vec{v}.\vec{w}$ بدلالة $\sin\alpha$.

ب ـ أوجد تعبيرا لـ $\sin\alpha$ بدلالة $\|\vec{u}\|$ و $\|\vec{v}\|$ و $\det(\vec{u},\vec{v})$.



القدرات المستهدفة

– التعبير عن توازي و تعامد مستقيمين .
– حساب مساحات و قياسات زوايا باستعمال الجداء السلمي.

خاصية :
إذا كان $\vec u$ و $\vec v$ متجهتان غير منعدمتين و α قياس الزاوية $(\vec u,\vec v)$ فإن :
$$\sin\alpha=\frac{\det(\vec u,\vec v)}{\|\vec u\|\times\|\vec v\|} \text{ و } \cos\alpha=\frac{\vec u.\vec v}{\|\vec u\|\times\|\vec v\|}.$$

تمرين تطبيقي رقــــــــم 2

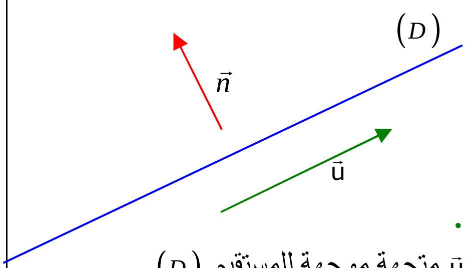
$(\vec i,\vec j)$ اساس متعامد ممنظم مباشر.
1 – أحسب $\vec u.\vec v$ في الحالتين التاليتين :
أ – $\vec u\,(3,-1)$ و $\vec v\,(-2,4)$.
ب – $\vec u\,(\sqrt3-\sqrt2,\sqrt2+1)$ و $\vec v\,(\sqrt2-1,\sqrt3+2)$.
2 – حدد قيمة العدد m لكي تكون $\vec u\,(2,m)$ و $\vec v\,(3,-2)$ متعامدتين .
3 – نعتبر المتجهة $\vec u\,(2,-3)$. حدد المتجهات $\vec v\,(x,y)$ بحيث يكون $\vec u.\vec v=2$ و $\|\vec v\|=2$.
4 – نعتبر المتجهتين $\vec u\,(\sqrt3-1,\sqrt3+1)$ و $\vec v\,(-1,1)$. أحسب $\cos(\vec u,\vec v)$ و $\sin(\vec u,\vec v)$

III– معادلة مستقيم معرف بمتجهة منظمية :

1 – متجهة منظمية على مستقيم.

نـــــشــــــاط رقـــــــم 6

نعتبر المستقيم (D) الذي معادلته : $2x-3y+1=0$.
1 – حدد متجهة $\vec u$ موجهة للمستقيم (D).
2 – بين أن المتجهات $\vec n\,(2,-3)$ و $\vec n\,'(6,-9)$ و $\vec n\,''(-10,15)$ متعامدة مع المتجهة $\vec u$.
3 – بين أن المتجهات $\vec n\,(2,-3)$ و $\vec n\,'(6,-9)$ و $\vec n\,''(-10,15)$ مستقيميتان مثنى مثنى.



تعريف :
(D) مستقيم في المستوى .
كل **متجهة غير منعدمة عمودية على متجهة موجهة للمستقيم (D) تسمى متجهة منظمية على (D) .**

$\vec u$ متجهة موجهة للمستقيم (D)
و $\vec n$ متجهة منظمية عليه.

ملاحظة:
– إذا كانت $\vec n$ متجهة منظمية على (D) فإن كل متجهة $k\vec n$ بحيث $k\in\mathbb{R}$ منظمية عليه.
– إذا كانت $\vec n$ متجهة منظمية على (D) و $\vec n\,'$ متجهة منظمية على (D) فإن $\vec n$ و $\vec n\,'$ مستقيميتان.
– إذا كان $\vec u\,(a,b)$ متجهة موجهة لمستقيم (D) فإن المتجهة $\vec n\,(-b,a)$ منظمية عليه.
– إذا كان (D) مستقيم معادلته $ax+by+c=0$ فإن $\vec u\,(-b,a)$ متجهة موجهة له و $\vec n\,(a,b)$ منظمية عليه.

تمرين تطبيقي رقــــــــم 3

1 – (D) مستقيم معرف بتمثيله البارامتري $t\in\mathbb{R}\ \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-3t \end{cases}$. حدد متجهة $\vec u$ موجهة للمستقيم (D)و حدد متجهة $\vec n$ منظمية على (D).
2 – (D) مستقيم معرف بمعادلته $3x-4y+3=0$. حدد متجهة $\vec u$ موجهة للمستقيم (D)و حدد متجهة $\vec n$ منظمية على (D).
3 – (D) مستقيم معادلته هي $-x+2y-1=0$.
أ – حدد معادلة المستقيم (D') الذي يمر من $A\,(2,1)$ و الموازي للمستقيم (D) .
ب – حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) المار من $B\,(1,0)$ و العمودي على المستقيم (D) .

2 – معادلة مستقيم معرف بنقطة و بمتجهة منظمية عليه.

نـــــشــــــاط رقـــــــم 7

ليكن $(O,\vec i,\vec j)$ معلم متعامد ممنظم.نعتبر المتجهة $\vec n\,(3,-1)$ و النقطة $A\,(-2,4)$.
1 – لتكن $M\,(x,y)$, حدد إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{AM}$ ثم أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AM}.\vec n$.
2 – بين أن مجموعة النقط $M\,(x,y)$ التي تحقق العلاقة $\overrightarrow{AM}.\vec n=0$ هو المستقيم المار من $A\,(-2,4)$ و الموجه بالمتجهة $\vec u\,(1,3)$.

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

القدرات المستهدفة

ـ التعبير عن توازي و تعامد مستقيمين .
ـ حساب مساحات و قياسات زوايا باستعمال الجداء السلمي.

خاصية :

لتكن $\vec{n}(a,b)$ متجهة غير منعدمة و $A(x_0,y_0)$ نقطة من المستوى.

مجموعة النقط M من المستوى التي تحقق العلاقة $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ هي المستقيم المار من النقطة A و الموجه بالمتجهة $\vec{u}(-b,a)$

بمعنى آخر : هو المستقيم المار من النقطة A و المتجهة $\vec{n}(a,b)$ منظمية عليه .

تمرين تطبيقي رقـــــــم 4

1 ـ حدد معادلة المستقيم (D) المار من النقطة $A(2,3)$ و $\vec{n}(2,-1)$ متجهة منظمية عليه .
2 ـ حدد معادلة المستقيم (D) المار من النقطة $A(4,-2)$ و $\vec{n}(\sqrt{2},-1)$ متجهة منظمية عليه.
3 ـ حدد معادلة المستقيم (D) واسط القطعة $[AB]$ بحيث $A(3,-1)$ و $B(-1,5)$.

3 ـ المسافة بين نقطة و مستقيم.

نـــشـــاط رقـــــــم 8

1 ـ ليكن (D) مستقيم يمر من النقطة $A(-1,-1)$ و $\vec{n}(2,-1)$ متجهة منظمية عليه.
أ ـ حدد معادلة المستقيم (D) .
ب ـ حدد معادلة المستقيم (D') المار من $M(3,2)$ و العمودي على المستقيم (D) .
ج ـ حدد إحداثيتي النقطة H تقاطع (D) و (D') ثم استنتج المسافة بين النقطة M و المستقيم (D).
2 ـ ليكن (D) مستقيم يمر من النقطة $A(x_A,y_A)$ و $\vec{n}(a,b)$ متجهة منظمية عليه.
و $M(x_M,y_M)$ نقطة من المستوى و H المسقط العمودي للنقطة M على المستقيم (D) .
أ ـ بين أن $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=\vec{n}.\overrightarrow{HM}$.
ب ـ بين أن $MH=\dfrac{|ax_M+by_M+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

مبرهنة :

المستوى (P) منسوب لمعلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.
ليكن (D) مستقيم معادلته $ax+by+c=0$ بحيث $(a,b)\neq(0,0)$ و $M(x_M,y_M)$ نقطة من المستوى (P) .

مسافة النقطة M عن المستقيم (D) هي : $d(M,(D))=\dfrac{|ax_M+by_M+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

تمرين تطبيقي رقـــــــم 5

1 ـ أحسب مسافة النقطة A عن المستقيم (D) في الحالات التالية :
أ ـ $A(3,-1)$ و $(D): 2x-4y+1=0$.
ب ـ $A(-2,1)$ و $(D): x-3y+3=0$.
ج ـ $A(3,-2)$ و (D) معرف بتمثيله البارامتري $\alpha\in\mathbb{R}$ $\begin{cases} x=-2+3\alpha \\ y=-1-3\alpha \end{cases}$