القدرات المنتظرة	الدرس 9 الدورة1
ـ استعمال دوران معلوم في وضعية هندسية؛ ـ إنشاء صور أشكال اعتيادية بدوران معلوم؛ ـ التعرف على دوران واستعماله في حل مسائل هندسية (تحديد محلات هندسية، إنشاءات هندسية،....)؛ ـ التعرف على تقايس الأشكال باستعمال الدوران.	10 ساعات

الدوران

I- تعريف الدوران

1- مركب تماثلين متعامدين محورهما متقاطعان

ليكن (D) و (D') مستقيمين متقاطعان في O من المستوى نضع $(D)=(OA)$ و $(D')=(OB)$

نعتبر α قياس الزاوية الهندسية $\widehat{\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)}$

1 بين أن $[2\pi]$ $\quad 2\overline{\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)}\equiv 2\alpha$ مهما يكن موضعي A و B على (D) و (D') على التوالي

2- استنتج أن $[2\pi]$ $\quad 2\overline{\left(\vec{u};\vec{v}\right)}\equiv 2\alpha$ حيث $\vec{u}$ و $\vec{v}$ موجهتين لـ(D) و (D') على التوالي

3- لتكن M و M_1 و M' ثلاث نقط من المستوى حيث $S_{(D)}(M)=M_1$ و $S_{(D')}(M_1)=M'$

نعتبر $[2\pi]$ $\quad \overline{\left(\vec{u};\vec{v}\right)}\equiv\dfrac{\beta}{2}$

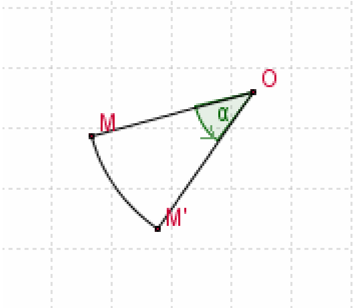
بين أن
$$\begin{cases} OM=OM' \\ \overline{\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right)}\equiv\beta \quad [2\pi] \end{cases}$$

خلاصة

إذن $S_{(D')}\circ S_{(D)}$ تطبيق من P نحو P الذي يربط كل نقطة M بنقطة M' حيث
$$\begin{cases} OM=OM' \\ \overline{\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right)}\equiv\beta \quad [2\pi] \end{cases}$$

2- تعريف

لتكن O نقطة من المستوى الموجه P و α عددا حقيقيا
الدوران الذي مركزه O و زاويته α هو التطبيق من P نحو P الذي يربط كل نقطة M بنقطة M' بحيث:
- $M'=O$ إذا كانت $M=O$
- $\begin{cases} OM=OM' \\ \overline{\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right)}\equiv\alpha \quad [2\pi] \end{cases}$ إذا كانت $M\neq O$



-* نرمز للدوران الذي مركزه O و زاويته α بالرمز $r(O;\alpha)$ أو بالرمز r

-* النقطة M' تسمى صورة M بالدوران r نكتب $r(M)=M'$

مثال

التماثل المركزي S_O دوران مركزه O و زاويته π

التطبيق المتطابق I_P دوران زاويته منعدمة و مركزه أية نقطة من المستوى

ملاحظات

* كل دوران مخالف للتطبيق المتطابق له نقطة وحيدة صامدة هي مركزه

ليكن $r(O;\alpha)$ دورانا

- إذا كان $[2\pi]$ $\quad \alpha\equiv 0$ فان $r(M)=M$

في هذه الحالة r هو التطبيق المتطابق في المستوى جميع نقط المستوى صامدة

- إذا كان $\alpha \not\equiv 0 \quad [2\pi]$ فان النقطة الوحيد الصامدة بالدوران r هي مركزه O

* ليكن (D) و (D') مستقيمين متقاطعان في O و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ موجهتين لـ(D) و (D')

$S_{(D')} \circ S_{(D)}$ دوران مركزه O و زاويته β حيث $[2\pi] \quad \overline{(\vec{u};\vec{v})} \equiv \frac{\beta}{2}$

3- الدوران العكسي

ليكن $r(O;\alpha)$ دورانا

$$r(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ \left(\overline{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}}\right) \equiv \alpha \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$r(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM' = OM \\ \left(\overline{\overrightarrow{OM'};\overrightarrow{OM}}\right) \equiv -\alpha \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$r(M)=M' \Leftrightarrow r'(M')=M \,/ \quad r'=r(O;-\alpha)$$

الدوران $r(O;-\alpha)$ يسمى الدوران العكسي للدوران $r(O;\alpha)$ نرمز له بالرمز r^{-1}

$$\begin{cases} r(M)=M' \\ r(O)=O \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^{-1}(M')=M \\ r^{-1}(O)=O \end{cases}$$

الدوران r تطبيق تقابلي في المستوى

خاصية

كل دوران $r(O;\alpha)$ هو تطبيق تقابلي في المستوى
الدوران $r(O;-\alpha)$ يسمى الدورا ن العكسي للدوران $r(O;\alpha)$ نرمز له بـ: r^{-1}

تمارين تطبيقية

1- ليكن $ABCD$ مربعا

حدد زاويتي الدوارنيين r_1 و r_2 الذي مركزاهما A و C على التوالي ويحولان معا النقطة D إلى B

2- ليكن ABC مثلث متساوي الأضلاع حيث $[2\pi] \quad \left(\widehat{\overline{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}$

أ- حدد مركز الدوران r الذي يحول B إلى C

ب- حدد الدوران العكسي للدوران r

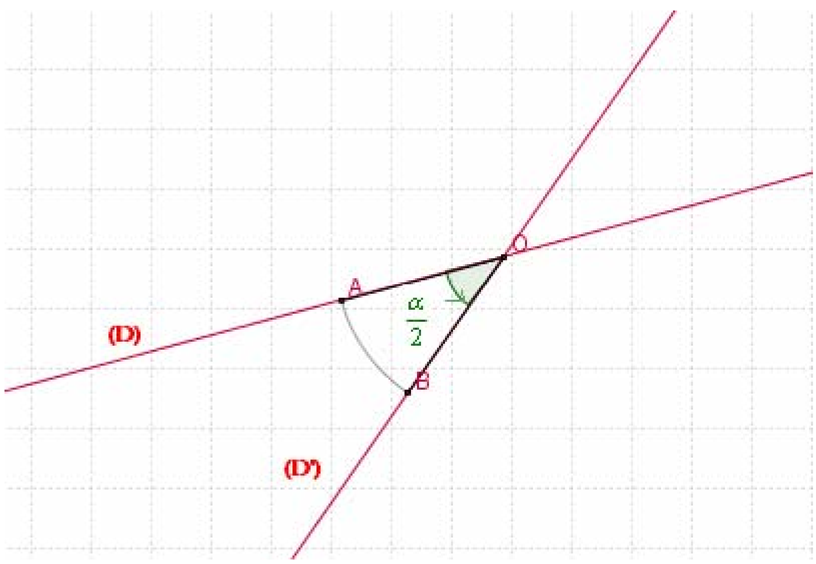
4- دوران ومركب تماثلين متعامدين محورهما متقاطعان

* رأينا $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ دوران مركزه O و زاويته β حيث (D) و (D') مستقيمين متقاطعان في O و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ موجهتين لـ(D) و (D') و $[2\pi] \quad \overline{(\vec{u};\vec{v})} \equiv \frac{\beta}{2}$

* عكسيا نعتبر الدوران $r=r(O;\alpha)$

نختار مستقيما (D) يمر من O

لتكن A نقطة من (D) تخالف O و B صورة A بدوران زاويته $\frac{\alpha}{2}$



لدينا إذن $[2\pi] \quad \left(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\alpha}{2}$

نعتبر $(D')=(OB)$

ومنه $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ دوران مركزه O و زاويته α

اذن $S_{(D')} \circ S_{(D)} = r(O;\alpha)$

مبرهنة

* ليكن (D) و (D') مستقيمين متقاطعان في O و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ موجهتين لـ(D) و (D')
$S_{(D')} \circ S_{(D)}$ دوران مركزه O و زاويته $2\overline{(\vec{u};\vec{v})}$
* كل دوران هو مركب تماثلين متعامدين محوراهما متقاطعان في مركز الدوران

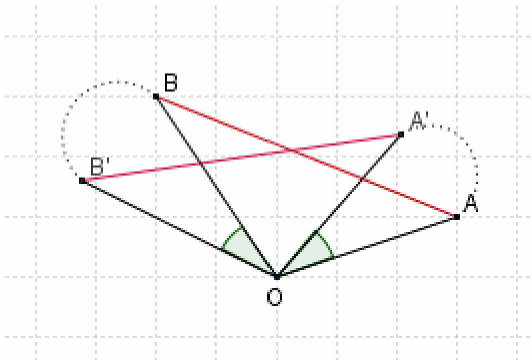
تمرين

نعتبر $ABCD$ مربعا بحيث $\overline{(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB})} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

حدد $S_{(AB)} \circ S_{(AC)}$ و $S_{(BD)} \circ S_{(AC)}$

II- خاصيات الدوران

1- خاصية أساسية (الحفاظ على المسافة)



ليكن $r(O;\alpha)$ دورانا و A وB نقطتين

$r(A) = A' \quad ; \quad r(B) = B'$

لنقارن $AB = A'B'$

حسب علاقة الكاشي في المثلثين OAB و $OA'B'$ لدينا:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB.\cos\left[\widehat{AOB}\right]$$

$$AB'^2 = OA'^2 + OB'^2 - 2OA' \cdot OB'.\cos\left[\widehat{A'OB'}\right]$$

و بما أن $r(A) = A' \quad ; \quad r(B) = B'$ فان: $\begin{cases} OA = OA' \\ \overline{(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'})} \equiv \alpha \quad [2\pi] \end{cases}$ و $\begin{cases} OB = OB' \\ \overline{(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OB'})} \equiv \alpha \quad [2\pi] \end{cases}$

و لدينا من جهة أخرى

$$\overline{(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})} \equiv \overline{(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'})} + \overline{(\overrightarrow{OA'};\overrightarrow{OB'})} + \overline{(\overrightarrow{OB'};\overrightarrow{OB})} \quad [2\pi]$$

$$\overline{(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})} \equiv \alpha + \overline{(\overrightarrow{OA'};\overrightarrow{OB'})} - \alpha \quad [2\pi]$$

$$\overline{(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})} \equiv \overline{(\overrightarrow{OA'};\overrightarrow{OB'})} \quad [2\pi]$$

ومنه $\left[\widehat{AOB}\right] = \left[\widehat{A'OB'}\right]$

و بالتالي $A'B'^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB.\cos\left[\widehat{AOB}\right]$

ومنه $A'B'^2 = AB^2$ اذن $A'B' = AB$

خاصية

ليكن r دورانا و A وB نقطتين
إذا كان $r(A) = A' \quad ; \quad r(B) = B'$ فان $A'B' = AB$
نعبر عن هذا بقولنا الدوران يحافظ على المسافة

تمرين

ليكن ABC مثلثا . نعتبر M و N نقطتين خارج المستوى بحيث MAB و NAC مثلثان متساويا الأضلاع
قارن MC و NB

2- الدوران و استقامية النقط

أ) صورة قطعة

لتكن $[AB]$ قطعة و A' وB' صورتي A و B بدوران r

لتكن M نقطة من $[AB]$ و M' صورتها بالدوران r

1- بين أن $M' \in [A'B']$

2- بين اذا كان $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$ حيث $0\le\lambda\le1$ λ فان $\overrightarrow{A'M'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$

الجواب

لدينا A' وB' وM' صور A و B و M بدوران r ومنه $MA=M'A'$ و $MB=M'B'$ و $AB=A'B'$

1- $M\in[AB]$ تكافئ $MA+MB=AB$

تكافئ $M'A'+M'B'=A'B'$

تكافئ $M'\in[A'B']$

2- ليكن $\lambda\in[0;1]$ و $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$

ومنه $M\in[AB]$ و $\dfrac{AM}{AB}=\lambda$

و بالتالي $M'\in[A'B']$ و $\dfrac{A'M'}{A'B'}=\lambda$

إذن $\overrightarrow{A'M'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$

خاصة

لتكن $[AB]$ قطعة و A' وB' صورتي A و B بدوران r
صورة القطعة $[AB]$ بالدوران r هي القطعة $[A'B']$
اذا كان $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$ حيث $0\le\lambda\le1$ فان $\overrightarrow{A'M'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$ حيث $r(M)=M'$

ب- صرة مستقيم

لتكن A' وB' صورتي النقطتين المختلفتين A و B بدوران r

أ- بين أن $r([AB))=[A'B')$

ب- بين أن $r((AB))=(A'B')$

خاصة

لتكن A' وB' صورتي نقطتين مختلفتين A و B على التوالي بدوران r
* صورة نصف المستقيم $[AB)$ هو نصف المستقيم $[A'B')$
* صورة المستقيم (AB) هو المستقيم $(A'B')$
* إذا كان $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}$ λ فان $\overrightarrow{A'M'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$ حيث $r(M)=M'$

ج- المرجح و الدوران

A' وB' و G' صور النقط A و B و G بدوران r على التوالي و G مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$

بين أن G' مرجح $(A';\alpha)$ و $(B';\beta)$

الجـواب

G مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ ومنه $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

و حيث الدوران يحافظ على معامل استقامية فان $\overrightarrow{A'G'}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{A'B'}$

إذن G' مرجح $(A';\alpha)$ و $(B';\beta)$

نتيجة التمرين(صحيحة لمرجح أكثر من نقطتين)

خاصة

الدوران يحافظ على المرجح

نتجة

A' وB' و I' صورالنقط A و B و I بدوران r على التوالي
إذا كان I منتصف $[AB]$ فان I' منتصف $[A'B']$
الدوران يحافظ على المنتصف

د) الحفاظ على معامل الاستقامية

A' و B' و C' و D' صور أربع نقط A و B و C و D بدوران r على التوالي و $\lambda \in \mathbb{R}$

حيث $\overrightarrow{CD} = \lambda \overrightarrow{AB}$

لنبين أن $\overrightarrow{C'D'} = \lambda \overrightarrow{A'B'}$

لنعتبر النقطة E حيث $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE}$ و E' صورة E بالدوران r

و منه $\overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{AB}$ و بالتالي $\overrightarrow{A'E'} = \lambda \overrightarrow{A'B'}$ لان المرجح يحافظ على معامل استقامية النقط

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE}$ تكافئ $[AD]$ و $[AE]$ لهما نفس المنتصف

و حيث أن الدوران يحافظ على المنتصف فان $[A'D']$ و $[A'E']$ لهما نفس المنتصف

ومنه $\overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{A'E'}$

اذن $\overrightarrow{C'D'} = \lambda \overrightarrow{A'B'}$

خاصية

لتكن A' و B' و C' و D' صور أربع نقط A و B و C و D بدوران r على التوالي و $\lambda \in \mathbb{R}$ إذا كان $\overrightarrow{CD} = \lambda \overrightarrow{AB}$ فان $\overrightarrow{C'D'} = \lambda \overrightarrow{A'B'}$ نعبر عن هذا بقولنا الدوران يحافظ على معامل استقامية متجهتين

تمرين

ليكن $ABCD$ مربعا

ننشئ خارجه المثلث CBF المتساوي الأضلاع و داخله المثلث ABE متساوي الأضلاع

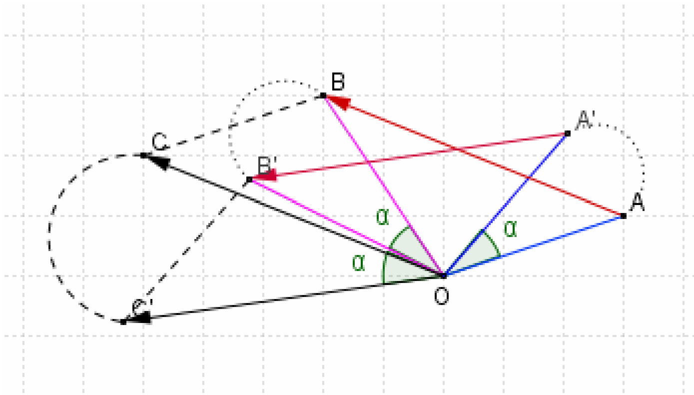
بين أن النقط D و E و F مستقيمية (يمكن اعتبار الدورن $r = r\left(B; -\dfrac{\pi}{3}\right)$

3- الدوران و الزوايا

أ) خاصية أساسية

لتكن A' و B' صورتي A و B بدوران r زاويته α على التوالي . لتكن C نقطة حيث $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$

لتكن $r(C) = C'$ ومنه $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{A'B'}$



و بالتالي $\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC'}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}}\right) \quad [2\pi]$

وحيث أن $\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC'}}\right) \equiv \alpha \quad [2\pi]$ فان $[2\pi]$

خاصية

ليكن r دوارانا زاويته α إذا كان A' و B' صورتي A و B بالدوران r فان $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}}\right) \equiv \alpha \quad [2\pi]$

ب- نتيجة

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'D'}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{C'D'};\overrightarrow{CD}}\right) \quad [2\pi]$$

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}}\right) \equiv \alpha + \left(\widehat{\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'D'}}\right) - \alpha \quad [2\pi]$$

إذن $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'D'}}\right) \quad [2\pi]$

نتيجة

لتكن A' و B' و C' و D' صور أربع نقط A و B و C و D بدوران r حيث $A \neq B$ و $C \neq D$

نعبر عن هذا بقولنا الدوران يحافظ على قيا س الزوايا $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)\equiv\left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'D'}\right)\quad[2\pi]$

نتيجة

الدوران يحافظ على التعامد و على التوازي

تمرين

ليكن ABC مثلثا متساوي الساقين رأسه A و (C) دائرة محيطة به . نعتبر M نقطة من القوس $\left[\widehat{AB}\right]$ الذي لا يحتوي على C . ليكن r الدوران الذي مركزه A و زاويته $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.

بين أن M و M' و C نقط مستقيمية حيث $r(M)=M'$

4- صورة دائرة بدوران

خاصية

صورة دائرة $C(\Omega;R)$ بدوران r هي دائرة $C(\Omega';R)$ حيث $r(\Omega)=\Omega'$

تمرين

ليكن $ABCD$ مربعا و (C) دائرة مارة من A و C

لتكن Q و R نقطتا تقاطع (C) مع (BC) و (CD) على التوالي

بين أن $BQ=DR$ (يمكن اعتبار الدوران r الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$)

III- مركب دورانين

1 – مركب دورانين لهما نفس المركز

خاصية

$r(O;\alpha)\circ r(O;\beta)=r(O;\alpha+\beta)$
بين ذلك

2 - مركب دورانين ليس لهما نفس المركز

أ- مركب تماثلين متعامدين محوراهما متوازيان

خاصية

- مركب تماثلين محوراهما متوازيان هو إزاحة
- كل إزاحة هو مركب تماثلين محوراهما متوازيان
بين ذلك

ب- مركب دورانين ليس لهما نفس المركز

خاصية

ليكن $r_1(O_1;\alpha)$ و $r_2(O_2;\beta)$ دورانين زاويتاهما غير منعدمتين و $O_1\neq O_2$
إذا كان $\alpha+\beta\neq 2k\pi$ $(k\in)$ فان $r_1\circ r_2$ دورانا زاويته $\alpha+\beta$
إذا كان $\alpha+\beta=2k\pi$ $(k\in)$ فان $r_1\circ r_2$ إزاحة
بين ذلك

تمارين و حلول

تمرين1

في مستوى موجه نعتبر ABC مثلثا متساوي الساقين في A حيث $[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}$

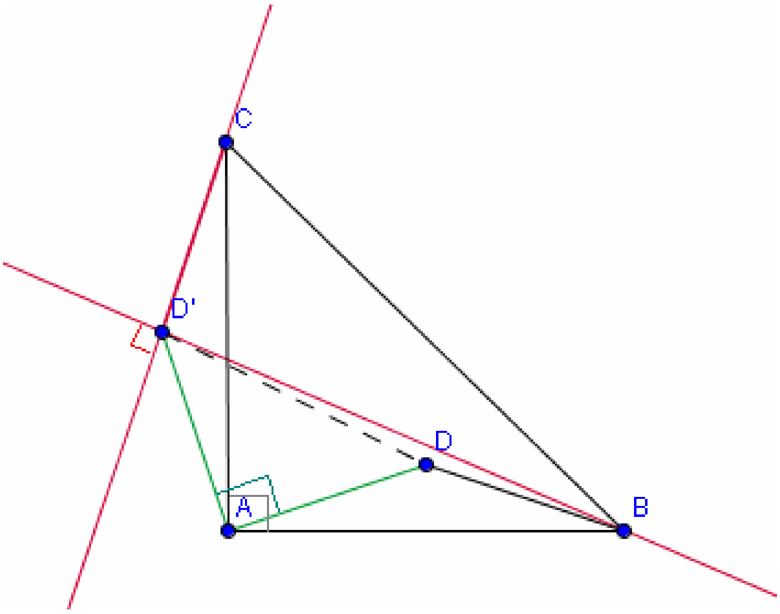
وD نقطة داخل المثلث ABC . ليكن r الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$

1- أنشئ D' صورة D بالدوران r

2- بين أن $BD=CD'$; $(BD)\perp(CD')$

الحل

-1 ننشئ D' صورة D بالدوران r



-2 نبين أن $BD = CD'$; $(BD) \perp (CD')$

لدينا $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ و ABC مثلث متساوي الساقين في A و منه $r(B) = C$

و حيث $r(D) = D'$ فان $BD = CD'$ لأن الدوران يحافظ على المسافة

لدينا $r(B) = C$ و $r(D) = D'$ و زاوية الدوران هي $\frac{\pi}{2}$ و منه $\left(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{CD'}\right) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

إذن $(BD) \perp (CD')$

تمرين2

في مستوى موجه نعتبر ABC مثلثا متساوي الساقين وقائم لزاوية في B حيث $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)$ زاوية غير مباشرة. لتكن O منتصف $[AC]$ و E و F نقطتين حيث $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

ليكن r الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$

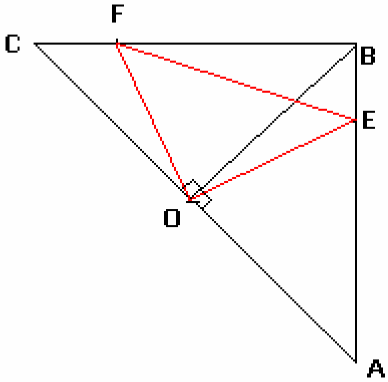
-1 أنشئ الشكل

-2 حدد صورتي A و B بالدوران r

-3 نضع $r(E) = E'$ بين أن $E' = F$ استنتج طبيعة المثلث OEF

الحل

-1 الشكل



2- نحدد صورتي A و B بالدوران r

لدينا ABC مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في B و O منتصف $[AC]$ ومنه $(OB)\perp(AC)$

و $OA=OB=OC$

لدينا $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})\equiv\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$ و $OA=OB$ و منه $r(A)=B$

لدينا $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})\equiv\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$ و $OC=OB$ و منه $r(B)=C$

1- نبين أن $E'=F$ نستنتج طبيعة المثلث OEF

$r(E)=E'$ و $r(A)=B$ و $r(B)=C$ و $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ ومنه $\overrightarrow{BE'}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

وحيث $\overrightarrow{BF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ فان $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BE'}$ إذن $E'=F$

ومنه $r(E)=F$ و حيث r دوران زاويته $\frac{\pi}{2}$ فان OEF مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في O

تمرين3

في مستوى موجه نعتبر ABC مثلثا قائم الزاوية في A و $[2\rho]$ $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})\equiv\alpha$ و r الدوران الذي مركزه B و زاويته α

1- أنشئ E و F حيث $r(C)=F\quad;\quad r(A)=E$

2- بين أن $(EF)\perp(BC)$

3- لتكن $(AC)\cap(EF)=\{I\}$ و $r(I)=J$ و $(AB)\cap(IJ)=\{K\}$

أ- بين أن النقط E و F و J مستقيمية

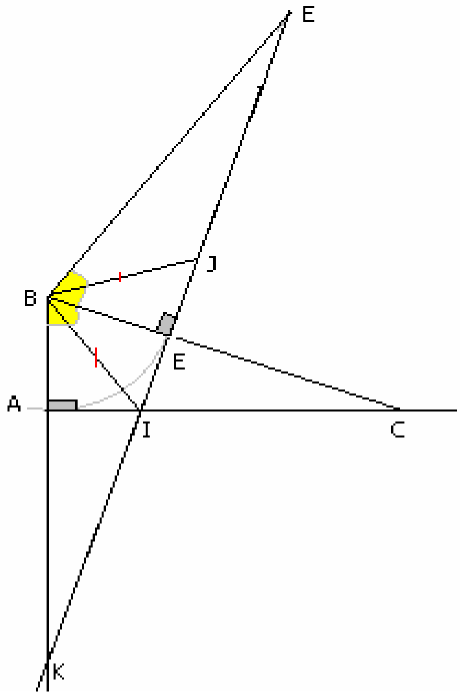
ب- بين أن E منتصف $[Ij]$

4- لتكن $(AB)\cap(IJ)=\{K\}$.

بين أن $r(K)=C$

الحل

1- ننشئ E و F حيث $r(C)=F\quad;\quad r(A)=E$



-2 بين أن $(EF)\perp(BC)$

بما أن $r(C)=F$; $r(A)=E$ و $r(B)=B$ فان $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\equiv(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EB})$

وحيث أن $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ فان $(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EB})\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ ومنه $(EF)\perp(EB)$

لدينا $r(B)=B$ و $r(A)=E$ ومنه $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})\equiv\alpha\equiv(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BE})\ [2\pi]$ و بالتالي $(BC)=(BE)$

إذن $(EF)\perp(BC)$

-3 أ- نبين أن النقط E و F و J مستقيمية

لدينا I و C و A مستقيمية و $r(C)=F$; $r(A)=E$ و $r(I)=J$

ومنه النقط J و E و F مستقيمية

ب- نبين أن E منتصف $[IJ]$

لدينا $r(I)=J$ و منه BIJ مثلث متساوي الساقين في الرأس B

وحيث أن $(IJ)\perp(EB)$ لأن $(IJ)=(EF)$ ومنه (EB) ارتفاع في المثلث BIJ

و بالتالي (EB) متوسط للمثلث BIJ إذن E منتصف $[IJ]$

-4 نبين أن $r(K)=C$

$(AB)\cap(IJ)=\{K\}$

لدينا $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BF})\equiv\alpha\equiv(\overrightarrow{BK};\overrightarrow{BC})\ [2\pi]$ ومنه (BC) منصف $(\widehat{KBF})$ وحيث أن $(EF)\perp(BC)$

فان المثلث KBF مثلث متساوي الساقين في الرأس B ومنه $BF=BK$

وحيث أن $r(C)=F$ فان $BC=BF$ و بالتالي $BC=BK$

إذن لدينا $(\overrightarrow{BK};\overrightarrow{BC})\equiv\alpha\ [2\pi]$ و $BC=BK$ ومنه $r(K)=C$

تمرين4

في مستوى موجه نعتبر ABC مثلثا متساوي الساقين في A حيث $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\equiv\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

ليكن $R_C = r\left(C;\frac{\pi}{6}\right)$ و $R_A = r\left(A;\frac{2\pi}{3}\right)$ نضع $f = R_C \circ R_A$

1- حدد $f(B)$

2- بين أن f دوران محددا زاويته

3- لتكن I نقطة تقاطع المنصفات الداخلية للمثلث ABC

أ) بين أن $R_C = S_{(CI)} \circ S_{(CA)}$ و $R_A = S_{(CA)} \circ S_{(IA)}$

ب) استنتج أن I مركز الدوران f

ج) لتكن $f(A) = A'$.

بين أن $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{IA'}\right) \equiv \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$

الحل

1- حدد $f(B)$

لدينا $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$ و $AB = AC$ و منه $R_A(B) = C$

و بالتالي $f(B) = R_C \circ R_A(B) = R_C(C) = C$

2- نبين أن f دوران محددا زاويته

لدينا $R_C = r\left(C;\frac{\pi}{6}\right)$ و $R_A = r\left(A;\frac{2\pi}{3}\right)$ و $f = R_C \circ R_A$

ومنه f دوران زاويته $\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

3- أ) نبين أن $R_C = S_{(CI)} \circ S_{(CA)}$ و $R_A = S_{(CA)} \circ S_{(IA)}$

I نقطة تقاطع المنصفات الداخلية للمثلث ABC

بما أن $(CA) \cap (CI) = \{C\}$ فان $S_{(CI)} \circ S_{(CA)}$ دوران مركزه C و زاويته $2\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CI}\right)$

و حيث أن (CI) منصف $\widehat{C}$ فان $2\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CI}\right) \equiv \left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right) \equiv \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$

إذن $R_C = S_{(CI)} \circ S_{(CA)}$

بما أن $(AC) \cap (AI) = \{A\}$ فان $S_{(CA)} \circ S_{(IA)}$ دوران مركزه A و زاويته $2\left(\overrightarrow{AI};\overrightarrow{AC}\right)$

و حيث أن (AI) منصف $\widehat{A}$ فان $2\left(\overrightarrow{AI};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$

إذن $R_A = S_{(CA)} \circ S_{(IA)}$

ب) نستنتج أن I مركز الدوران f

لدينا $f = R_C \circ R_A$ و منه $f = S_{(CI)} \circ S_{(CA)} \circ S_{(CA)} \circ S_{(IA)} = S_{(CI)} \circ \left(S_{(CA)} \circ S_{(CA)}\right) \circ S_{(IA)}$

و بالتالي $f = S_{(CI)} \circ I_{(P)} \circ S_{(IA)} = S_{(CI)} \circ S_{(IA)}$

و منه $f(I) = S_{(CI)} \circ S_{(IA)}(I) = I$ إذن I مركز الدوران f

ج) نبين أن $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{IA'}\right) \equiv \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$

f دوران مركزه I و زاويته $\frac{5\pi}{6}$

$f(A) = A'$ ومنه $\left(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IA'}\right) \equiv \frac{5\pi}{6} \quad [2\pi]$

لدينا أن (AI) منصف $\widehat{A}$ ومنه $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AI}\right) \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$

و بالتالي $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{IA}\right) \equiv \frac{\pi}{3} - \pi \equiv \frac{-2\pi}{3} \quad [2\pi]$

و منه $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{IA}\right) + \left(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IA'}\right) \equiv \frac{-2\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} \quad [2\pi]$

إذن $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{IA'}\right) \equiv \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$