الأولى بكالوريا علوم تجريبية	المنطق	الأستاذ : الحيان

التمرين 1:

نعتبر العبارة (P) التالية :

$$(P): \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in IR; x^2 - xy + y^2 = 0$$

أ- أعط نفي العبارة (P) .

ب- بين أن العبارة (P) خاطئة .

التمرين 2:

أكتب العبارات التالية باستعمال الرموز والمكممات ثم حدد نفي كل واحدة منها.

(P_1): مربع أي عدد حقيقي هو أكبر من أو يساوي 1- .

(P_2): للحدودية x^2-5x+3 على الأقل جذر حقيقي.

(P_3): يوجد عدد حقيقي أصغر قطعا من كل الأعداد الحقيقية.

(P_4): إذاكان عدد حقيقي أصغر من أو يساوي 1- , فإن هذا العدد سالب قطعا.

التمرين 3: الإ ستدلال بالإستلزام المضاد للعكس

1) ليكن a و b عددين حقيقيين غير متقابلين . بين أن:

$$a \neq -\frac{1}{2}b \Rightarrow \frac{a-b}{a+b} \neq -3$$

2) بين أن:

$$(P): \forall x \in \mathbb{R}; x \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} \neq 1 + \frac{x}{2}$$

$$(Q): \forall (x,y) \in \mathbb{R}_*^2; y \neq -\frac{3}{4}x \Rightarrow \frac{x-y}{x+y} \neq 7$$

التمرين 4: الإستدلال بالمثال المضاد

بين أن العبارات التالية خاطئة :

(P) : لكل عدد حقيقي x لدينا : $x^2 < x$.

(Q): إذا كان a و b عددان حقيقيان بحيث $a^2 = b^2$ فإن $a = b$.

التمرين 5: الإستدلال بفصل الحالات

1) بين أن لكل عدد صحيح طبيعي n , n^3-n يقبل القسمة على 3.

2) بين أن لكل عددين صحيحين نسبيين m و n , لدينا : m-n و m+n لهما نفس الزوجية.

التمرين 6 : الإ ستدلال بالترجع

1- بين أن: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*; 1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}}$

2- بين أن: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*; 1^2+2^2+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

3- بين أن : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*; 1^3+2^3+...+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$

4- بين أن لكل عدد صحيح طبيعي n , $n^3 - n$ يقبل القسمة على 3.

5- بين أن لكل عدد صحيح طبيعي n , $7^n - 2^n$ يقبل القسمة على 5.

6- بين أن لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n , $3^{2n} + 2^{6n-5}$ يقبل القسمة على 11.

7- بين أن لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n , $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ يقبل القسمة على 7.

8- a) بين أن : $\boxed{\forall a > 0; \forall n \in \mathbb{N}; (1+a)^n \geq 1+na}$

b) استنتج أن:

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}; 2^n \geq 1+n \\ \forall n \in \mathbb{N}; 3^n \geq n \\ \forall n \in \mathbb{N}; (n+1)^n \geq 2n^n \end{array}}$$

9- لكل n من IN^* , نضع a_n العدد المكون من n رقم كلها تساوي 7 $(a_1 = 7; a_2 = 77; a_3 = 777; a_4 = 7777; ...)$.

بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^*; a_n = \frac{7}{9}\left[10^n - 1\right]$.

10- بين أن لكل $n \in \mathbb{N}^*$ ؛ لدينا :

$$(1\times2)+(2\times3)+...+(n(n+1)) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

11- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : \ 6 \ / \ n^3 - n$.

12- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : \ 111 \ / \ 10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$.

13- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : \ 6 \ / \ n(2n+1)(7n+1)$.

14- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq 4) : \ 2^n \geq n^2$.

التمرين 7 : الإ ستدلال بالخلف

1) بين أن $\sqrt{2}$ عدد حقيقي لا جذري.

2) بين أن لكل عدد صحيح طبيعي n لدينا: n زوجي $\Rightarrow n^2$ زوجي

التمرين 8 : الإستدلال بالتكافؤات المتوالية

1) بين أن: $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 = b^2 \Leftrightarrow \left[(a=b) \wedge (a=-b)\right]$

2) ليكن $a \in [1,+\infty[$ و $b \in [4,+\infty[$. بين أن :

$$\left(\sqrt{a-1} + 2\sqrt{b-4} = \frac{a+b}{2}\right) \Leftrightarrow \left((a=2) \wedge (b=8)\right)$$

التمرين 9 :

حدد من بين العبارات التالية , العبارات الصحيحة :

$$(P_1): \forall x \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{R}^+ / x = \sqrt{y}$$

$$(P_2): \exists y \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^+ / x = \sqrt{y}$$

$$(P_3): \forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} / n = 2m$$

$$(P_4): \exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} / n = 2m$$

$$(P_5): \forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} / x + y = 5$$

$$(P_6): \exists y \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{Z} / x + y = 5$$

التمرين 10 :

1) لتكن P و Q عبارتين . أعط نفي التكافؤ $P \Leftrightarrow Q$ مستعملا العمليات التالية : النفي و العطف و الفصل .

2) أعط نفي العبارة:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0 \Leftrightarrow \left((x=0) \vee (y=0)\right)$$

التمرين 11 :

1. بين أن :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} = 2 \Leftrightarrow x = y = 0$$

2. ليكن $x \in \mathbb{R}$. بين أن :

$$\left[(x \neq \sqrt{3}) \wedge (x \neq -\sqrt{3})\right] \Leftrightarrow \left[\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} \neq 1\right]$$

3. بين أن : $\forall x \in \mathbb{R} : \ [x \neq 0] \Leftrightarrow \left[\sqrt{x+1} \neq 1 + \frac{x}{2}\right]$.

التمرين 12 : لتكن x و y و a و b أعداد حقيقية غير منعدمة

بين أن : $ax+by=1 \Rightarrow \dfrac{1}{x^2+y^2} \le a^2+b^2$

التمرين 13 : بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$ ؛ لدينا :

n زوجي $\Leftrightarrow$ n^2 زوجي

التمرين 14 : نعتبر العبارة التالية :

$$(P):\quad (\forall y \in \mathbb{R}),\quad (\exists x \in \mathbb{R})\quad :\quad x^2+xy+y^2=0$$

1. حدد نفي العبارة (P) .
2. بين أن العبارة (P) خاطئة .

التمرين 15 : نعتبر العبارة التالية :

$$(P):\quad (\forall x\in[0,2]),\quad \left(\exists y\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]\right)\quad :\quad xy-x+2y-1=0$$

1. حدد نفي العبارة (P) .
2. بين أن العبارة (P) صحيحة .

التمرين 16 : أكتب كلا من العبارات التالية باستعمال الرموز المنطقية وأذكر إذا كانت صحيحة أو خاطئة .

1. لا يوجد أي عدد جذري حل للمعادلة : $x^2-9=0$.
2. لكل عددين جذريين a و b ؛ يوجد عدد جذري c بحيث :
$a<c$ و $c<b$.

التمرين 17 :

حل في $\mathbb{R}^2$ النظمات التالية :

$$\begin{cases} x+y=3 \\ \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=\dfrac{9}{2} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 3x^2-y-1=0 \\ xy-2x^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2|x|-y^2=-1 \\ -|x|+5y=11 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x^2-y^2=0 \\ x^2=64 \end{cases}$$

التمرين 18 : لتكن a و b و c أعداد حقيقية . بين الإستلزام التالي :

$$\left[\left(|a-b|<c\right)\wedge\left(|a+b|<c\right)\right] \Rightarrow \left[|ab| \le \frac{c^2}{2}\right]$$

التمرين 19 : لتكن a و b و c أعداد حقيقية موجبة قطعا تحقق : $abc<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ و $abc>1$.

أثبت أن :

1. كل هذه الأعداد لا تساوي العدد 1 .
2. أحد هذه الأعداد أصغر من العدد 1 (باستعمال البرهان بالخلف).

التمرين 20 : ليكن a و b عددين حقيقيين. بين أن :

$$[\forall x \in \mathbb{R}:\quad ax+by=0] \Leftrightarrow a=b=0$$

التمرين 21 : نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x)=x^2-3x+2$

1. أعط نفي العبارة : $\left(\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2\right):\quad \left(f(a)=f(b)\Rightarrow a=b\right)$
2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$ ثم بين أن العبارة السابقة خاطئة.

التمرين 22 :

1. بين أن : $\forall x \in [-2,2]:\quad \sqrt{4-x^2}-x \le 2\sqrt{2}$
2. بين أن :

$$\forall x \in \mathbb{R}:\quad \sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}(x+2)>0$$

التمرين 22 : لكل $n\in\mathbb{N}^*$, نضع :

$$S_n=1+2+3+\ldots+n$$

$$S_n'=1+3+5+\ldots+(2n-1)$$

$$S_n''=2+4+6+\ldots+2n$$

1. بين بالترجع أن : $S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.
2. استنتج , بدلالة n , المجموعين : S_n' و S_n'' .
3. أحسب المجموعين التاليين : $2+4+6+\ldots+2006$
و : $1+3+5+\ldots+2005$

التمرين 23 : ليكن u التطبيق المعرف من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$\begin{cases} u(0)=2 \\ u(n+1)=7u(n) \quad , \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1. أحسب $u(1)$ و $u(2)$.
2. بين بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N}\quad :\quad u(n)=2\times 7^n$

التمرين 24 : ليكن u التطبيق المعرف من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$\begin{cases} u(0)=-3 \\ u(n+1)=u(n)+\dfrac{7}{4} \quad , \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1. أحسب $u(1)$ و $u(2)$.
2. بين بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N}\quad :\quad u(n)=-3+\dfrac{7}{4}n$

التمرين 25 : لتكن P و Q و R ثلاث عبارات . أعط نفي كل من العبارتين التاليتين :

$$(P_1):\quad P\wedge(Q\vee R)$$

$$(P_2):\quad P\Rightarrow Q$$

$\wedge$: هو العطف المنطقي ؛ ($\wedge$ = و).
$\vee$: هو الفصل المنطقي ؛ ($\vee$ = أو).

التمرين26 :

نعتبر العبارة التالية :

$$(P):\quad \forall x\in\mathbb{R}^*,\quad -\left(\frac{x+1}{x}\right)^2+4\left(\frac{x+1}{x}\right)+3>7\Rightarrow x\le 0$$

1. أكتب الإستلزام المضاد للعكس للعبارة (P) .
2. هل العبارة (P) صحيحة ؟ علل جوابك .
3. أكتب نفي العبارة (P).

التمرين 27 :

بين أن :

$$\forall\alpha\in\left]\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{2}\right[\quad,\quad \exists n\in\mathbb{N}\quad/\quad \alpha<\sqrt{\frac{2n^2+n+1}{n^2+n+3}}$$

التمرين 28 : حدد القيمة المنطقية لكل من العبارات التالية :

A: كل الأعداد الحقيقية الموجبة لها جذرمربع موجب .
B: يوجد عدد حقيقي موجب يساوي مربع كل عدد حقيقي موجب.
C: $\forall(a,b)\in\left(]0,+\infty[\right)^2, \forall c\in\mathbb{R}: ac>bc\Rightarrow a>c$.