| حمـــيد بوعيـــون | النهايــــات والإتصـــــــال | الثـــانية علوم تجريبية |
|---|---|---|

**تمرين1**

أحسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{|x|\to+\infty}(\sqrt{9x^2+x+1}-2x)$ (1 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{9x^2+x+1}+3x)$ (2

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-\sqrt{x+2})$(3 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{1-2x^3}-\sqrt{-x^3+x+1})$(4

$\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+x-1}}{x^2-\sqrt{x^4-1}}$ (5 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1+\sqrt{-x+1}}{x^2-\sqrt{x^2+2}}$ (6 $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sqrt{1-3x}-2}{x+1}$ (7 $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$ (8 $\lim\limits_{x\to-2^-}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x+2}$ (9

$\lim\limits_{x\to3^-}\frac{x^2-x-6+\sqrt{3x-x^2}}{x+3}$ (10 $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{3-x}-3}{x+1}$ (11 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x}-x}$ (12

$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{3}\cos x-\sin x-\sqrt{3}}$ (13

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x-\sqrt{3}\sin x}{6x-\pi}$ (14 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}$ (15

**تمرين2**

نعتبر الدالة
$$f(x)=\begin{cases}(x-1)\sin(\frac{1}{x-1}) & ;\ x<1\\ \frac{x^2-2x-8}{|x-2|-2} & ;\ x\geq1\end{cases}$$

1) حدد $D_f$ وادرس اتصال f عند $x_0=1$ (2 احسب $\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)$

3) هل الدالة f تقبل تمديدا بالاتصال في النقطة 4

**تمرين3**

نعتبر الدالة $f$ المعرفة بمايلي
$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+2x-a}{x-2} & ;x>2\\ \frac{2x^2+b-a}{x} & ;x\leq2\end{cases}$$

حدد العددين a وb بحيث تكون الدالة $f$ متصلة في النقطة 2

**تمرين4**

نعتبر الدالة $f(x)=\frac{x^3-4x^2+4x}{x^2-4}$

1) حدد $D_f$ وأحسب النهايات عند محدات $D_f$

2) هل الدالة $f$ تقبل تمديدا بالإتصال في كل من 2 و -2 ؟

**تمرين 5**

نعتبر الدالة $f(x)=\frac{\sqrt{1+\sin^2x}-1}{x^2}$

1) حدد $D_f$

2) بين أن الدالة $f$ تقبل تمديدا بالإتصال في 0 .

**تمرين 6**

نعتبر الدالة $f$ المعرفة بما يلي :
$$\begin{cases}f(x)=\frac{\sqrt{3}\cos x-\sin x}{2\cos x-1} & ;x\neq\frac{\pi}{3}\\ f(\frac{\pi}{3})=\frac{2}{\sqrt{3}}\end{cases}$$

بين أن $f$ متصلة في $\frac{\pi}{3}$ .

**تمرين 7**

نعتبر الدالة $f$ :
$$\begin{cases} f(x) = x\sin\left(\frac{2}{x}\right), x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) ادرس اتصال $f$ في 0. 2) احسب $\lim_{+\infty} f(x)$.

**تمرين 8**

1) بين أن المعادلة $x^5 + x^3 - x^2 + x + 1 = 0$ تقبل على الاقل حلا في IR

2) بين أن المعادلة $3x^7 + 2x^5 + x - 10^6\sqrt[4]{3} = 0$ تقبل حلا وحيدا في IR

3) نعتبر الدالة $f(x) = x^4 + x - 1$ . بين أن المنحنى $C_f$ يقطع محور الأفاصيل في المجال $[0,1]$

4) نعتبر الدالتين : $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = -x^3$

بين أن المنحنيين $C_f$ و $C_g$ يتقاطعان في نقطة وحيدة أفصولها $\alpha$ بحيث : $-\frac{7}{8} < \alpha < -\frac{3}{4}$

**تمرين 9**

لتكن f دالة متصلة على $[0,1]$ بحيث f(0)=0 وf(1)=1

بين أن $'(\exists c \in ]0,1[): f(c) = \frac{1-c}{1+c}$

**تمرين 10**

لتكن $f$ دالة متصلة على $[a,b]$ بحيث

$f(a) < ab$ و $f(b) > b^2$ مع $(a < b)$

بين أنه يوجد عدد حقيقي $c$ من $[a,b]$ بحيث $f(c) = bc$

**تمرين 11**

لتكن f دالة عددية تحقق $\exists k \in IR_+^*; \forall (x,y) \in IR^2 : |f(x) - f(y)| \leq k \times |x - y|$

بين أن f دالة متصلة على IR

**تمرين 12**

لتكن f دالة متصلة على $[0,1]$ بحيث f(1)=f(0)=0 و $(\forall x \in [0,1]): f(x) \geq 0$ .

بين أن $(\forall n \in IN^*)(\exists c \in [0,1]): f(c) = f(c + \frac{1}{n})$

**تمرين 13**

لتكن f دالة معرفة من $IR^+$ نحو $IR^+$ بحيث : f متصلة على $IR^+$ و $(\forall x \in IR^+) : f(x) < x$

1) بين أن $f(0) = 0$ .

2) بين أن : $(\forall (a,b) \in (IR_*^{+2}))(\exists M \in [0,1[)(\forall x \in [a,b]) : f(x) \leq Mx$

**تمرين 14**

1) بين أنه لكل n من $IN^*$ المعادلة $Arc\cos(x) - x^n = 0$ تقبل حلا وحيدا $a_n$ في المجال $]0,1[$ .

2) قارن العددين $a_n$ و $\frac{1}{2}$ .

3) بين أنه : $(\forall n \in IN^*) : a_{n+1} > a_n$ .

**تمرين 15**

لتكن f دالة عددية متصلة على $[a;b]$ حيث $\forall x \in [a,b]: f(x) > 0$ .

أثبت أن $\exists m > 0, f(x) \geq m$

**تمرين 16**

نعتبر العددين $A=3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}$ et $B=-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}$

1) أحسب $A-B$ و $\sqrt[3]{AB}$

2) نعتبر العدد $x=\sqrt[3]{3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}-\sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}$

a) أحسب $x^3$ بدلالة $x$ . b) استنتج أن $x=1$ .

**تمرين 17**

حل في IR المعادلات التالية :

1) $(2x-1)^5=32$ 2) $(x+1)^3=-27$ 3) $x^6=6$ 4) $x^4=-2$ 5) $(\frac{1-\sqrt[3]{x}}{3-\sqrt[3]{x}})^3+8=0$

6) $\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}=\sqrt[6]{1-x^2}$ (يمكن وضع $t=\sqrt[6]{\frac{1+x}{1-x}}$ )

**تمرين 18**

نعتبرالدالة $f(x)=2x^2-4x+1$

1) ادرس تغيرات f وانشئ منحناها .

2) ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=[1,+\infty[$

a) بين أن g تقابل من المجال I نحو مجال J يجب تحديده

b)حدد $g^{-1}(x)$ وارسم $C_{g^{-1}}$

**تمرين 19**

نعتبر الدالة $f(x)=\frac{4x}{x^2+1}$

بين أن f تقابل من $[-1,1]$ نحو مجال يجب تحديده ثم حدد $f^{-1}(x)$

**تمرين 20**

نعتبرالدالة $f(x)=\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}$

1) حدد $D_f$

2) ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=]0,2[$

a) بين أن g تقابل من المجال I نحو مجال J يجب تحديده

b)حدد $g^{-1}(x)$

**تمرين 21**

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي :

$f(x)=(\sqrt{x+1}-1)^3$

1) حدد حيز تعريف الدالة f .

2) a) بين أن الدالة f تقابل من المجال $]-1,+\infty[$ نحو مجال J يجب تحديده

b) حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J .

**تمرين 22**

نعتبر الدالة $f(x)=x-3\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}$

1) حدد حيز تعريف الدالة f .

2) حل في $IR^+$ المعادلة $f(x)=x$

3) a) بين أن $f(x)=(\sqrt[3]{x}-1)^3+1$

b) بين أن الدالة f تزايدية قطعا من المجال $[0,+\infty[$

c) بين أن الدالة f تقابل من المجال $[0,+\infty[$ نحو مجال J يجب تحديده

d) حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J .

**تمرين 23**

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي

$$f(x) = -x - 3\sqrt[3]{(1-x)^2} + 3\sqrt[3]{1-x} + 1$$

1) حدد حيز تعريف الدالة f .

2) بين أن f تقابل من $]-\infty,1]$ نحو مجال يجب تحديده ثم حدد $f^{-1}(x)$ .

3) حل في $]-\infty,1]$ المعادلة $f(x)=1$ .

**تمرين 24**

نعتبر الدالة $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$

1) a) بين أن : $(\forall x \in ]-1,+\infty[) : f(x) = \sqrt{x+1} - \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

b) بين أن $f$ تقابل من $]-1,+\infty[$ نحو مجال $J$ يتم تحديده ثم حدد $f^{-1}(x)$

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f^{-1}(x) = f(x)$

**تمرين 25**

نعتبر الدالة $f$ المعرفة ب: $f(x) = \sqrt{(4-\sqrt[3]{x^2})^3}$ :

1) حدد مجموعة تعريف الدالة $f$ : $D_f$

2) ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=[0,8]$

بين أن g تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده ثم حدد $g^{-1}(x)$

3) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=x$ .

**تمرين 26**

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}}$

1) بين أن f تقابل من $]0,+\infty[$ نحو مجال J يجب تحديده

2) بين أن $(\forall x \in IR) : x - \sqrt{x^2+4} < 0$

3) حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J .

4) حل في $]0,+\infty[$ المعادلة $f(x) = \sqrt{5}$

**تمرين 27**

أحسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{8x^3 - x + 1} - x)$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt[3]{1-x^3} + 2x)$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{-x^3+2x^2-x} - \sqrt{2x^2+1})$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{8x^3-1} - 2x)$ 5) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt[3]{-8x^3+x^2+1} + 2x)$ 6) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt[3]{-3x^3-1} + x\sqrt[3]{3})$

7) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}+x}{\sqrt[3]{1-x}-x^2}$ 8) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[4]{-x^3+4x+1}-\sqrt{2-x}}$

9) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$ 10) $\lim\limits_{x\to-2^-} \dfrac{\sqrt[3]{x^2-4}}{x+2}$ 11) $\lim\limits_{x\to-2^-} \dfrac{\sqrt[3]{(x+2)^2}}{x+2}$

12) $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}+x^2+x-2}{x-1}$

13) $\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+x^2+x}{x+1}$

**تمرين 28**

أثبت المتساويات التالية :

1) $Arc\tan(\frac{1}{5})+Arc\tan(\frac{2}{3})=\frac{\pi}{4}$

2) $Arc\tan\frac{1}{2}+Arc\tan\frac{1}{5}+Arc\tan\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$

3) $Arc\tan\frac{1}{3}+Arc\tan\frac{1}{7}-Arc\tan\frac{1}{2}=0$

4) $(\forall x>0) : Arc\tan(x)+Arc\tan(\frac{1}{x})=\frac{\pi}{2}$

5) $(\forall x<0) : Arc\tan(x)+Arc\tan(\frac{1}{x})=-\frac{\pi}{2}$

6) $(\forall x\in IR) \; : \; \cos(Arc\tan x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

7) $4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$ (لاحظ أن $0\le\arctan(\frac{1}{5})\le\frac{\pi}{8}$)

8) $(\forall x>0) \; : \; Arc\tan(x+1)-Arc\tan x=Arc\tan(\frac{1}{x^2+x+1})$

**تمرين 29**

أحسب $\arctan 2+\arctan 3$

**تمرين 30**

حل في IR المعدلة :

$$Arc\tan(\frac{x-8}{8})-Arc\tan(x)=\frac{\pi}{2}$$

**تمرين 31**

حل في IR المعادلات التالية .

1) $Arc\tan 2x+Arc\tan(3x)=\frac{\pi}{4}$ 2) $Arc\tan(\frac{x^2-1}{x^2})+Arc\tan(x)=\frac{\pi}{2}$

**تمرين 32**

نعتبر في $IR$ المعادلة

$$(E) : \arctan(x-1)+\arctan x+\arctan(x+1)=\frac{\pi}{2}$$

1) بين المعادلة $(E)$ تقبل حلا وحيدا في $IR$ وأن هذا الحل ينتمي إلى $]0,1[$ .

2) حل المعادلة $(E)$ .

**تمرين 33**

أحسب النهايات لتالية :

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}$ 2) $\lim_{x\to\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{Arc\tan x-\frac{\pi}{6}}{x-\frac{\sqrt{3}}{3}}$

3) $\lim_{x\to 1}Arc\tan(\frac{x}{x^2-1})$ 4) $\lim_{x\to 0^-}\frac{Arc\tan\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}}{x}$

5) $\lim_{x\to+\infty}x(Arc\tan x-\frac{\pi}{2})$ . 6) $\lim_{x\to 0^-}x(\arctan(\frac{1}{x})+\frac{\pi}{2})$

7) $\lim_{x\to+\infty}(x\arctan(\frac{x+1}{x})-\frac{\pi}{4}x)$

**تمرين 34**

نعتبر الدالة $f(x)=\arctan(\frac{x+1}{x})$

1) حدد $D_f$ .

2) ليكن $g$ قصور $f$ على $]0,+\infty[$ .

a) بين أن $g$ تقابل من $]0,+\infty[$ نحو مجال يجب تحديده .

b) حدد $f^{-1}(x)$ .

**تمرين 35**

حل في IR المعدلتين :

1) $Arc\tan 2x + Arc\tan(3x)=\frac{\pi}{4}$ 2) $Arc\tan(\frac{x^2-1}{x^2})+Arc\tan(x)=\frac{\pi}{2}$

**تمرين 36**

نعتبر في $IR$ المعادلة $(E):\arctan(x-1)+\arctan x+\arctan(x+1)=\frac{\pi}{2}$

1) بين المعادلة $(E)$ تقبل حلا وحيدا وأن هذا الحل ينتمي إلى $]0,1[$ .

2) حل المعادلة $(E)$ .

# تمارين حول دراسة الدوال

الثانية سلك بكالوريا علوم تجريبية

تمرين1

أدرس ومثل مبيانيا الدالة العددية $f$ المعرفة بـ $f(x)=\frac{2}{x}+\ln\frac{x}{2}$

تمرين2

نعتبر الدالة العددية $f$ لمتغير حقيقي المعرفة بـ $f(x)=(\ln x)^2-\ln x$

1- حدد مجموعة تعريف الدالة $f$ و نهايات $f$ عند محداتها

2- أدرس تغيرات $f$

3- حل المعادلة $f(x)=0$

4- حدد معادلة المماس لـ $C_f$ عند النقطة ذات الأفصول 1 ثم أنشئ $C_f$

تمرين3

أدرس ومثل مبيانيا الدالة العددية $f$ المعرفة بـ $f(x)=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|$

تمرين4

نعتبر الدالة العددية $f$ لمتغير حقيقي المعرفة بـ

$$\begin{cases} f(x)=x(1-\ln x)^2 & x\succ 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1- حدد $D_f$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أدرس اتصال $f$ على يمين 0

2- أدرس اشتقاق $f$ على يمين 0 و أول النتيجة هندسيا

3- أدرس تغيرات $f$

4- حدد نقطة انعطاف المنحنى $C_f$

5- أدرس الفرع اللانهائي ثم أنشئ $C_f$ في م.م.م

تمرين5

نعتبر الدالة العددية $f$ لمتغير حقيقي المعرفة بـ $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

1- حدد $D_f$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2- أدرس تغيرات $f$

3- حدد نقطة انعطاف المنحنى $C_f$

4 - أدرس الفرعان اللانهائيان ثم أنشئ $C_f$ في م.م.م

5- استعمل $C_f$ لحل المعادلة و المتراجحة التاليتين $x+\sqrt{1+x^2}=1$ $\quad$ $x+\sqrt{1+x^2}\succ 1$

تمرين6

نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة بـ $f(x)=\ln\left(e^{2x}-e^x+1\right)$

1- حدد $D_f$ و نهايات $f$ عند محدات $D_f$

2- أدرس تغيرات $f$ و أعط جدول تغيراتها

3- حدد $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)$

4- حدد معادلة المماس عند النقطة ذات الأفصول 0

5- أنشئ $C_f$ في مستوى منسوب إلى م.م.م

تمرين7

I- نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة بـ $f(x)=-x+2\sqrt{x}-1$

1- حدد $D_f$ و نهايات $f$ عند محدات $D_f$

2- أدرس قابلية اشتقاق $f$ علىيمين0

3- أحسب $f'(x)$ و أعط جدول التغيرات

II- نعتبر الدالة $g$ حيث $g(x)=-e^{x}+2\sqrt{e^{x}}-1$

1- حدد $D_g$ و نهايات $g$ عند محدات $D_g$ و أدرس الفروع اللانهائية لـ $C_g$

2- أدرس تغيرات $g$

3- بين أن $C_g$ تقبل نقطة انعطاف وحددها

4- حدد تقاطع $C_g$ و المستقيم $(\Delta):\quad y=1$

5- أنشئ $C_g$ في مستوى منسوب إلى م.م.م

6- ليكن $h$ قصور الدالة $g$ على $]-\infty;0]$

بين أن $h$ تقابل من $]-\infty;0]$ نحو مجال $I$ يجيب تحديده و حدد $h^{-1}(x)$ لكل $x$ من $I$

تمرين8

نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة ب

$$\begin{cases} f(x)=e^{x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)} & ;\quad x\succ 1 \\ f(x)=(1-x)\ln(1-x) & ;\quad x\prec 1 \\ f(1)=0 \end{cases}$$

1- حدد $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$ $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$

2- أدرس الاشتقاق عند 1 و أول النتيجتين هندسيا

3- أحسب $f'(x)$ على كل من $]1;+\infty[$ و $]-\infty;1[$ و أعط جدول التغيرات .

4- أدرس الفروع اللانهائية و أنشئ $C_f$

تمرين9

نعتبر $f(x)=x+\ln\left(\dfrac{2x^2}{x^2+1}\right)$

1- حدد $D_f$ و نهايات $f$ عند محدات $D_f$

2- أدرس تغيرات $f$ و أعط جدول تغيراتها

3- أثبت أن $C_f$ مقعر على $D_f$

4- أدرس الفروع اللانهائية و أنشئ $C_f$ (نقبل أنه يوجد عد وحيد د وحيد α من $\left]\frac{1}{2};1\right[$ حيث $f(\alpha)=0$)

ب- أدرس تغيرات $f$

تمرين12

I- نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $D=[0;1[\cup]1;+\infty[$ بحيث $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-1}+\ln\left|x^2-1\right|$

1- أحسب نهايات $f$ عند محدات $D$.

2- بين أن $f'(x)=\frac{2x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$ لكل $x$ من $D$

و أعط جدول تغيرات $f$

3- استنتج مما سبق إشارة $f(x)$ لكل $x$ من $D$

II - لتكن $g$ الدالة المعرفة على $D$ بـ $g(x)=x\ln\left|x^2-1\right|$

1- أ- أحسب نهايات $g$ عند محدات $D$.

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$ و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

2- بين لكل $x$ من $D$ $g'(x)=f(x)$ و أعط جدول تغيرات $g$.

3- أ- استنتج من دراسة الدالة $f$ إحداثيتي $I$ نقطة انعطاف المنحنى $C_g$

ب- حل في $D$ المعادلة $g(x)=0$

ج- أنشئ $C_g$

تمرين13

<u>الجزء الأول</u> لتكن $f$ الدالة المعرفة بـ $f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{2x}-4(x-1)e^x-2$

1- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و بين لكل $x$ من $\mathbb{R}$ $f(x)=xe^{2x}\left(1-\frac{1}{2x}-\frac{4}{e^x}+\frac{4}{xe^x}-\frac{2}{xe^{2x}}\right)$

ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2- أدرس تغيرات $f$

3- أ- أدرس الفروع اللانهائية لـ $C_f$

ب- بين أن $C_f$ يقطع محور الأفاصيل في نقطة $x_0$ تنتمي إلى $[-2;-1]$

$$\left(e^4\simeq\frac{225}{4};\quad e^2\simeq\frac{15}{2};\quad e\simeq\frac{11}{4}\right)$$

ج- أنشئ $C_f$ $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$

<u>الجزء الثاني</u> لتكن $g$ الدالة المعرفة بـ

$$\begin{cases} g(x)=\left(x^2-4x\right)\ln x-\frac{1}{2}\left(x^2-8x+4\right) & x\succ 0 \\ g(0)=-2 \end{cases}$$

1- بين أن $g(x)=f(\ln x)$ $\forall x\in\left]0;+\infty\right[$

2- أدرس اتصال و اشتقاق $g$ في يمين 0

3- أدرس تغيرات $g$

4- أ- أدرس الفروع اللانهائية لـ $C_g$

ب- أستنتج من 2- ب- في الجزء الأول, تأطيرا لأفصول نقطة تقاطع $C_g$ ومحور الأفاصيل

ج- حدد نصف المماس لـ $C_g$ في النقطة ذات الأفصول 0 ثم أنشئ $C_g$

## تمرين14

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي

$$\begin{cases} f(x)=(x+2)e^{\frac{1}{x}} & x \prec 0 \\ f(x)=x^2(1-\ln x) & x \succ 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1- بين أن الدالة $f$ متصلة في 0

2- أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

3- أ- بين أن المنحنى $C_f$ يقبل محور الأراتيب كاتجاه مقارب بجوار $+\infty$ .

ب- بين أن المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=x+3$ مقارب مائل للمنحنى $C_f$ بجوار $-\infty$ .

4- بين أن محور الأفاصـــيل مماس للمنحنى $C_f$ عند النقطة $O$.

5- أدرس تغيرات $f$ و أعط جدول تغيراتها.

6- أ- بين أن $f''(x)=-(1+2\ln x)$ $\forall x\in ]0;+\infty[$ و $f''(x)=\dfrac{(5x+2)e^{\frac{1}{x}}}{x^4}$ $\forall x\in ]-\infty;0[$

ب- حدد أفصول كل من نقطتي انعطاف المنحنى $C_f$

7- أنشئ $C_f$ (نأخذ $\frac{e}{2}\approx 1,4$ $\sqrt{e}\approx 1,6$ $\frac{1}{\sqrt{e}}\approx 0,6$ $e^{-1}\approx 0,4$)

## تمرين15

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $D=\mathbb{R}-\{1\}$ بما يلي

$$\begin{cases} f(x)=\ln|x-1|+\dfrac{1}{x-1} & x\succ 0 \quad x\neq 1 \\ f(x)=(x-1)e^x+\dfrac{1}{2}x^2 & x\leq 0 \end{cases}$$

1- بين أن الدالة $f$ متصلة في 0

2- أحسب نهايات $f$ عند محدات $D$

3- أدرس اشتقاق $f$ في 0 و أول النتيجة هندسيا.

4- أدرس تغيرات $f$ و أعط جدول تغيراتها.

5- بين أن النقطة ذات الأفصول3 نقطة انعطاف ل $C_f$

6- أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $C_f$.

7- أثبت أن $C_f$ يقطع محور الأفاصيل في نقطة أفصولها $\alpha$ حيث $-2\prec\alpha\prec-1$.

## تمرين16

لتكن $f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي

$$\begin{cases} f(x)=xe^{\frac{1}{x}} & x\prec 0 \\ f(x)=\dfrac{x^2}{4}(2\ln x-3) & x\succ 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1- بين أن $f$ متصلة في0 .

2- أ- بين أن $f$ قابلة للاشتقاق في 0.

ب- حدد الدالة المشتقة . ثم حدد تغيرات $f$ .

3- بين أن النقطة $A\left(1;-\frac{3}{4}\right)$ نقطة انعطاف للمنحنى $C_f$ و أكتب معادلة ديكارتية لمماس $C_f$ في النقطة A

4- أ- حدد تقاطع $C_f$ و محور الأفاصيل .
ب- بين أن $C_f$ يقبل فرعا شلجميا و أن المستقيم ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب لـ $C_f$ بجوار $-\infty$.
ج- أنشئ $C_f$.

تمرين17

I- 1- تأكد أن $\frac{x^2}{x^2+1}=1-\frac{1}{1+x^2}$ $\forall x\in\mathbb{R}$

2- أحسب $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx$ $\left(t=\sqrt{e^x-1}\right)$

II- نعتبر $f(x)=\frac{x}{x+1}-\ln\frac{x+1}{2}$

1- حدد $D_f$ ونهايات $f$ عند محداتها
2- أدرس تغيرات $f$
3- تحقق أن $A\left(1;\frac{1}{2}\right)$ نقطة انعطاف $C_f$ و أعط معادلة المماس عند هذه النقطة.
4- أدرس الفروع اللانهائية ثم أنشئ $C_f$
5- أحسب حيز المستوى المحصور بين $C_f$ ومحور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=1$ ; $x=\frac{1}{2}$ على التوالي

تمرين18

نعتبر $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x)=2x-2+\ln\frac{x^2-2x+2}{x^2}$

1- أحسب نهايات $f$ عند محدات $\mathbb{R}^*$
2- بين أن $f'(x)=\frac{2(x-1)(x^2-x+2)}{x(x^2-2x+2)}$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$ و أعط جدول تغيرات $f$
3- أ- أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $C_f$
ب- أدرس الوضع النسبي لـ $C_f$ و المستقيم $(D):\ y=2x-2$
ج- بين أنه يوجد عدد $\alpha$ من $\left]\frac{-1}{2};\frac{-1}{3}\right[$ حيث $f(\alpha)=0$ $\left(\ln 25\succ\frac{8}{3}\ ;\ \ln 13\prec 3\right)$
د- أنشئ $C_f$
4- أ- تحقق أن $\frac{2x-4}{x^2-2x+2}=\frac{2x-2}{x^2-2x+2}-\frac{2}{1+(x-1)^2}$ $\forall x\in\mathbb{R}$
ب- أحسب مساحة الحيز المحصور بين $C_f$ و المستقيمات المعرفة بالمعادلات $x=1$ ; $x=2$ و $y=2x-2$

تمرين19

نعتبر $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بـ $f(x)=\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x}\right)$

1- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2- أدرس قابلية اشتقاق الدالة $f$ على اليمين في 0 و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها

3- أحسب $f'(x)$ و أعط جدول تغيرات $f$

4 - أ- أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $C_f$

ب- أنشئ $C_f$

5- أ- تحقق أن $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2x}}=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x}}$ $\forall x\in\mathbb{R}^+$

ب- ليكن $\lambda\in\left]0;1\right[$ أحسب $I=\int_\lambda^1\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2x}}dx$

ج- أحسب $A(\lambda)$ مساحة الحيز المحصور بين $C_f$ و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=1$ ; $x=\lambda$ ثم حدد $\lim\limits_{x\to 0}A(\lambda)$

## تمرين20

نعتبر $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\left(2x^2-3x\right)e^x$

1- أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

ب- أحسب $f'(x)$ و أعط جدول تغيرات $f$

ج- أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $C_f$ و أنشئ $C_f$

2- نعتبر المعادلة التفاضلية $E:\quad y''-2y'+y=4e^x$

أ- بين أن $f$ حل للمعادلة $E$

ب- حل المعادلة $E$

ج- بين أنه توجد دالة أصلية $F$ للدالة $f$ تحقق $\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)-2f(x)+F(x)=4e^x$

استنتج $F(x)$

3- ليكن $\alpha\in\left]-\infty;0\right[$

أحسب $A(\alpha)$ مساحة الحيز المحصور بين $C_f$ و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=0$ ; $x=\alpha$ ثم حدد $\lim\limits_{\alpha\to-\infty}A(\alpha)$

## تمرين21

1- نعتبر $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}-\ln\left(1+e^x\right)$

a)- أدرس تغيرات $f$ و أعط جدول تغيراتها

b)- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-1+x\right)=0$ و أول النتيجة هندسيا ثم أنشئ $C_f$

2- نعتبر $g$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=e^{-x}\ln\left(1+e^x\right)$

a)- بين أن $g'(x)=e^{-x}f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

b)- - أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$

c)- أعط جدول تغيرات $g$ و أنشئ $C_g$

3- ليكن $\lambda\in\mathbb{R}$ نضع $I(\lambda)=\int_0^\lambda g(x)dx$

a)- أحسب $I(\lambda)$ باستعمال المكاملة بالأجزاء

b)- أحسب $\lim_{x\to+\infty} I(\lambda)$

4- نعتبر المعادلة $E:\quad y'+y=\dfrac{1}{1+e^{x}}$

a)- بين أن $g$ حل للمعادلة $E$.

b)- حل المعادلة $E$

تمرين22

نعتبر $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x+1+e^{-x}$

1- أ- أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

ب- أحسب $f'(x)$ و أعط جدول تغيرات $f$ و استنتج إشارة $f(x)$

2- نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=\ln\left(x+1+e^{-x}\right)$

أ- أدرس تغيرات $g$ و أعط جدول تغيراتها

ب- a) بين أن $\lim_{x\to-\infty} g(x)+x=0$ وأول النتيجة هندسيا

b) بين أن $g(x)+x\prec 0$ $\forall x\in\left]-\infty;-1\right[$

c) بين أن $0\prec g(x)-\ln x\le\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)$ $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}$. استنتج $\lim_{x\to+\infty} g(x)-\ln x$

ج- أنشئ المنحنيين $C_g$ و $C_{\ln}$ في نفس المعلم لمتعامد الممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

3- نعتبر المعادلة التفاضلية $E: y'+y=x+2$

تأكد أن $f$ حل خاص للمعادلة $E$ و حل المعادلة $E$.

تمرين23

نعتبر الدالتين $f$ و $g$ المعرفتين على $\left]-1;+\infty\right[$ $f(x)=x+\dfrac{2\ln(x+1)}{x+1}$

$g(x)=(x+1)^2+2-2\ln(x+1)$

1- أحسب $g'(x)$ . استنتج أن $g$ تقبل قيمة دنيا ثم إشارة $g(x)$ .

2- أ- أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ $\lim_{x\to-1} f(x)$

ب- أحسب $f'(x)$ و أعط جدول تغيرات $f$

3- بين أن المستقيم $(D): y=x$ مقارب مائل للمنحنى $C_f$ وحدد وضعيته بالنسبة للمنحنى .

4 - أنشئ $C_f$.

5- a) حدد دالة أصلية لدالة $h$ على $\left]-1;+\infty\right[$ حيث $h(x)=\dfrac{1}{x+1}\times\ln(x+1)$

b) أحسب مساحة الحيز المحصور بين $C_f$ و مح الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=e-1\quad;\quad x=0$.

تمرين 24

نعتبر $f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=(x-1)^2e^{2x}$

1) حدد $\lim_{x\to+\infty} f(x)\quad;\quad\lim_{x\to-\infty} f(x)$

2) أدرس تغيرات الدالة $f$.

3) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $C_f$ و أنشئه في مستوى منسوب إلي معلم م.م.

4) $a$ - بين أن الدالة $f$ تحقق العلاقة $f''(x)-4f'(x)+4f(x)=2e^{2x}$

$b$- استنتج دالة أصلية للدالة $f$ .

$c$- حل المعادلة التفاضلية $y''-4y'+4y=2e^{2x}$

5) $a$- أحسب $A(\lambda)$ مساحة الحيز المحصور بين $C_f$ و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=1$ ; $x=\lambda$ حيث $\lambda \prec 1$

$b$- أحسب $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} A(\lambda)$

1- a) حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ; $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

b) أدرس اتصال $g$ في 0 ثم اشتقاق على يمين و يسار0 و أول النتيجتين هندسيا .

3- أحسب مساحة الحيز المحصور بين $C_g$ و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=-1$ ; $x=-e$

تمرين25

A) نعتبر $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^{+*}$ بـ $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x-\ln(x+1)$

3- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

2- أحسب $f'(x)$ و أعط جدول تغيرات $f$ و استنتج إشارة $f(x)$

B) نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$$\begin{cases} g(x)=e^{(x+1)(\ln x-\ln(x+1))} & x\succ 0\\ g(x)=-x\ln(-x) & x\prec 0\\ g(0)=0 \end{cases}$$

3- a) بين أن

$$\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\quad g'(x)=f(x)\times g(x)$$
$$\forall x\in\mathbb{R}^{-*}\quad g'(x)=-1-\ln(-x)$$

b) أعط جدول تغيرات g

c) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $C_g$.ثم أنشئ $C_g$.

تمرين 26

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$$\begin{cases} f(x)=-xe^{x+1} & x\le -1\\ f(x)=-x+(x+1)\ln(x+1) & x\succ -1 \end{cases}$$

3- أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ب- أدرس اتصال $f$ في 1-.

ج- أدرس اشتقاق $f$ على يمين ويسار 1- و أول النتيجتين هندسيا.

4- أحسب $f'(x)$ على $]-\infty;-1[$ و $]-1;+\infty[$ و أعط جدول تغيرات $f$

5- أ- بين أن $C_f$ تقبل نقطة انعطاف في النقطة $I$ التي أفصولها 2- .

ب- حدد معادلة المماس لـ $C_f$ عند النقطة $I$.

6- أ ـ أدرس الفروع اللانهائية

ب- أنشئ $C_f$ $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$ نأخذ ( $e^{-1}\simeq 0,4$ )

ج- أحسب بـ $cm^2$ مساحة الحيز المحصور بين $C_f$ ومحور الأفاصيل و محور الأراتيب و المستقيم الذي معادلته $x=e-1$.

7- نعتبر المعادلة التفاضلية $E: y''-2y'-3y=4xe^{x+1}$

أ – بين أن الدالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=-xe^{x+1}$ حل خاص للمعادلة $E$.

ب- حل المعادلة $E$ .

تمرين27

نعتبر $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ
$$\begin{cases} f(x)=2\ln x-(\ln x)^2 & x\succ 0 \\ f(x)=x^2e^x+1 & x\leq 0 \end{cases}$$

1- حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

1- $a$) أحسب $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ و أول النتيجة هندسيا b) أحسب $f'(x)$ على $\mathbb{R}^*$.

c) أدرس تغيرات $f$ و أعط جدول تغيراتها.

3 – أحسب $f''(x)$ على $\mathbb{R}^*$. حدد أفاصيل نقط انعطاف المنحنى $C_f$.

4-a) أدرس الفروع اللانهائية b) حدد تقاطع $C_f$ ومحور الأفاصيل.

c) أنشئ $C_f$ . $\left(4e^{-2}=0,54\right)$

5- حدد مساحة الحيز المحصور بين $C_f$ ومحور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بـ $x=1$ ; $x=e^2$

تمرين 28

نعتبر $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{x^2-1}{2x} & x\succ 0 \\ f(x)=xe^x & x\leq 0 \end{cases}$$

1- لتكن $g$ الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ ب $g(x)=x^2+3-2\ln x$

أدرس تغيرات $g$ و استنتج إشارة $g(x)$.

1- a) حدد $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) بين أن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{2x^2}$ $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}$ و أحسب $f'(x)$ على $\mathbb{R}^{-*}$.

c) أعط جدول تغيرات $f$.

d) بين أن $C_f$ تقبل نقطة انعطاف عند النقطة ذات الأفصول2- .

2- أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $C_f$ و أنشئ $C_f$.

3- حدد مساحة الحيز المحصور بين $C_f$ و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=1$ ; $x=e$

4- نعتبر المعادلة التفاضلية $E: y''-3y'+2y=-e^x$

a) تأكد أن الدالة $x\to xe^x$ حل خاص للمعادلةE

b) حل المعادلة E.

تمرين29

نعتبر $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ
$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x+2}\ln(x+2) & x\geq -1 \\ f(x)=(x+1)e^{x+2} & x\prec -1 \end{cases}$$

1- a) حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) بين أن $f$ متصلة في 1- و أدرس اشتقاق $f$ في 1-

2- أدرس تغيرات $f$ و أعط جدول تغيراتها.

3- أدرس تقعر المنحنى $C_f$.

4- أدرس الفروع اللانهائية و أنشئ $C_f$ .

5- حدد مساحة الحيز المحصور بين $C_f$ ومحور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بـ $x=-1$ ; $x=e^2-2$