

التكامل

الثانية سلك بكالوريا علوم رياضية

I- تكامل دالة متصلة على مجال

1- تعريف و ترميز

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a و b عنصرين من I .
إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالة f على I فان $F(b)-F(a)=G(b)-G(a)$.
أي أن العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$ غير مرتبط باختيار الدالة الأصلية F .

تعريف

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a و b عنصرين من I .
العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$ حيث F دالة أصلية للدالة f على I , يسمى تكامل الدالة f من a إلى b
ويكتب $\int_a^b f(x) dx$ ويقراً مجموع $f(x) dx$ من a إلى b أو تكامل من a إلى b لـ $f(x) dx$.

a و b يسميا محدا التكامل $\int_a^b f(x) dx$

في الكتابة $\int_a^b f(x) dx$ يمكن تعويض x بأي حرف آخر ، بمعنى أن

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \dots\dots$$

من أجل تبسيط الكتابة $F(b)-F(a)$ نكتبها على الشكل $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$

أمثلة

* نحسب $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$

الدالة $x \rightarrow \frac{1}{x}$ متصلة على $[1;2]$ و دالة أصلية لها هي $x \rightarrow \ln x$

اذن $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2$

* أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$; $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+1} dx$; $\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos x dx$

2- خاصيات

أ- خاصيات

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a و b و c عناصر من I

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx \quad * \quad \int_a^a f(x) dx = 0 \quad *$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad * \quad (\text{علاقة شال})$$

أمثلة

أحسب $I = \int_{-1}^1 |x| dx$

$$\int_{-1}^1 |x| dx = \int_{-1}^0 |x| dx + \int_0^1 |x| dx = \int_{-1}^0 -x dx + \int_0^1 x dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 = 1$$

(ب-) لتكن f دالة متصلة على مجال I و a عنصرا من I

$$\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \int_a^x f(t) dt$$

لدينا $\forall x \in I \quad \varphi(x) = F(x) - F(a)$ حيث F دالة أصلية لـ f على I .
اذن φ قابلة للاشتقاق على I و $\varphi' = f$ و $\varphi(a) = 0$ أي أن φ دالة الأصلية للدالة f على I التي تنعدم

في a

خاصية

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a عنصرا من I .
الدالة المعرفة على I بما يلي $x \rightarrow \int_a^x f(t) dt$ هي الدالة الأصلية لـ f على I التي تنعدم في a

مثال نعلم أن الدالة $x \rightarrow \ln x$ هي الدالة الأصلية لـ $x \rightarrow \frac{1}{x}$ على $]0; +\infty[$ التي تنعدم في 1.

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

تمرين حدد الدالة الأصلية لـ f على $]0; +\infty[$ التي تنعدم في 2 حيث $\forall x \in]0; +\infty[\quad f(x) = \frac{1}{x} \ln x$

ج- خاصية

لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a; b]$ و λ عدد حقيقي ثابت

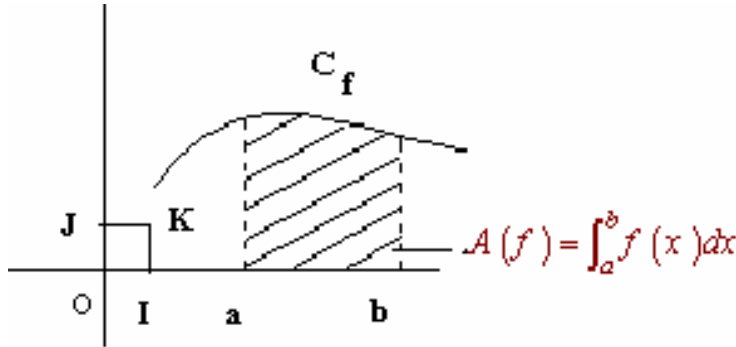
$$\int_a^b (\lambda f(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx \quad \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

تمرين حدد $\int_0^1 (x^2 - 3x + 1) dx$; $\int_0^\pi \cos^4 x dx$ (يمكن اخطاها $\cos^4 x$)

تمرين نعتبر $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$ و $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$

أحسب $I + J$ و $I - J$ واستنتج I ; J

د التآويل الهندسي للعدد $\int_a^b f(x) dx$



خاصية

إذا كانت f دالة متصلة و موجبة على $[a; b]$ ($a < b$) فان مساحة الحيز المحصور بين منحنى الدالة f و محور الأفاصل و المستقيمين المعرفتين على التوالي بالمعادلتين $x = a$ و $x = b$ هي

$$A(f) = \int_a^b f(x) dx$$

إذا كان المستوى منسوب إلى معلم متعامدين فان وحدة قياس المساحة هي مساحة المربع

ملاحظة

OIJK

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \text{ نعتبر}$$

$$\left(\|\vec{i}\| = 1cm \quad \|\vec{j}\| = 2cm\right) \quad C_f \text{ أنشئ}$$

أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المحصور بين C_f و محور الأفاصل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين
 $x=1$; $x=3$.

II- تقنيات حساب التكاملات

1- الاستعمال المباشر لدوال الأصلية

أمثلة

$$* \text{ أحسب } \int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx \text{ نلاحظ أن } \frac{(\ln x)^2}{x} \text{ على شكل } u'u^2 \text{ حيث } u(x) = \ln x$$

$$\text{و نعلم أن الدالة الأصلية لـ } u'u^2 \text{ هي } \frac{1}{3}u^3 \text{ إذن } \frac{1}{3} \int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \left[\frac{1}{3} u^3(x) \right]_1^e = \left[\frac{1}{3} \ln^3 x \right]_1^e = \frac{1}{3}$$

$$* \text{ أحسب } \int_0^1 \frac{2}{e^x + 1} dx \text{ لدينا } \frac{2}{e^x + 1} = 2 \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} \text{ بهذا التحويل نلاحظ أن } \frac{2}{1 + e^{-x}} \text{ يكتب على شكل}$$

$$-2 \frac{u'}{u} \text{ حيث } u(x) = 1 + e^{-x} \text{ إذن } \int_0^1 \frac{2}{e^x + 1} dx = \left[-2 \ln |u(x)| \right]_0^1 = \left[-\ln(1 + e^{-x}) \right]_0^1$$

$$\text{تمارين} \quad -1 \quad \text{حدد } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x dx$$

$$-2 \quad \text{أ- أوجد } a, b \text{ و } c \text{ حيث } \frac{2x^4 + x^2 + x - 1}{x^3 + x} = ax + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2 + 1} \quad \forall x \neq 0$$

$$\text{ب- استنتج قيمة } \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x^4 + x^2 + x - 1}{x^3 + x} dx$$

$$-3 \quad \text{بين أن التعبير } \frac{1}{x^2 - 2x + 5} \text{ يكتب على شكل } \frac{1}{2u^2 + 1} \text{ حيث } u \text{ دالة يجب تحديدها.}$$

$$\text{استنتج قيمة } \int_1^{1+2\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 - 2x + 5} dx$$

$$-4 \quad \text{أحسب } \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx \quad ; \quad \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx \quad \left(\frac{1}{x \ln x} = \frac{1}{\ln x} \right)$$

2- المكاملة بالأجزاء

لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على $[a; b]$ بحيث f' و g' متصلتين على $[a; b]$
 نعلم أن

$$\forall x \in [a; b] \quad (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\forall x \in [a; b] \quad f'(x)g(x) = (fg)'(x) - f(x)g'(x)$$

خاصية

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [(fg)(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

$$\text{مثال} \quad \text{أحسب } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx \quad \text{نضع } u'(x) = \cos x \quad ; \quad v(x) = x$$

$$v'(x) = 1 \quad ; \quad u(x) = \sin x \quad \text{ومنه}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1 \quad \text{إذن}$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx \quad ; \quad J = \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx \quad ; \quad I = \int_1^e \ln x dx \quad \text{أحسب}$$

تمرينالحل

$$K = [e^x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = [e^x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [e^x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - K$$

$$K = \frac{1}{2} \left([e^x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [e^x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \dots\dots\dots$$

$$\int_0^1 \ln \left| \frac{x+2}{x+1} \right| dx \quad \int_0^1 x \sqrt{x+3} dx \quad \int_0^3 (x-1)e^{2x} dx \quad \int_1^2 x^2 \ln x dx \quad \text{أحسب 1- تمرين}$$

$$f(x) = \frac{x}{\cos^2 x} \quad \text{حيث} \quad \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\quad \text{2- باستعمال المكاملة بالأجزاء أوجد الدوال الأصلية لـ } f \text{ على}$$

$$3- \text{أحسب } I = \int_0^x e^t \cos^2 t dt \quad (\text{يمكن اعتبار } J = \int_0^x e^t \sin^2 t dt)$$

3- المكاملة بتغيير المتغير

لتكن g دالة قابلة للاشتقاق على $[a; b]$ حيث g' متصلة على $[a; b]$. و f دالة متصلة على J حيث

$$g([a; b]) = J$$

إذا كانت F دالة أصلية لـ f على J فإن $(F \circ g)'(x) = f(g(x)) \times g'(x) \quad \forall x \in [a; b]$

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = [F \circ g(x)]_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$$

خاصية

لتكن g دالة قابلة للاشتقاق على $[a; b]$ حيث g' متصلة على $[a; b]$. و f دالة متصلة على J حيث

$$g([a; b]) = J$$

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$$

ملاحظة

إذا وضعنا $t = g(x)$ فإن $\frac{dt}{dx} = g'(x)$ أي $dt = g'(x) dx$

إذا عوضنا في التعبير $f(g(x)) g'(x) dx$ المتغير x بالمتغير t نحصل على $f(t) dt$

$$\left. \begin{array}{l} t = g(a) \\ t = g(b) \end{array} \right\} \text{فإن} \quad \left. \begin{array}{l} x = a \\ x = b \end{array} \right\} \text{ولدينا إذا كان}$$

نقول إننا أجرينا تغييرا للمتغير بوضع $t = g(x)$

$$\left(t = \tan \frac{x}{2} \right) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \cos x} \quad \left(t = \frac{1}{x} \right) \quad \int_1^{\sqrt{3}} \frac{4}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx \quad \text{أحسب أمثلة}$$

$$\left(\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad ; \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \right) \quad \text{ملاحظة}$$

$$(e^x = t) \quad \int_1^{\ln 2} \sqrt{e^x + 1} \quad ; \quad (t = 2 + \sqrt{x}) \quad \int_0^1 \frac{dx}{2 + \sqrt{x}}$$

$$(t = \tan x) \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx \quad , \quad (t = e^x) \quad \int_1^2 \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$$

$$\left(t = \frac{e^u - e^{-u}}{2} \quad ; \quad x = \frac{1}{t} \right) \quad \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx$$

III- التكامل و الترتيب

1- مقارنة تكاملين

(a) لتكن f دالة متصلة على $[a; b]$ و F دالة أصلية لـ f على $[a; b]$

$$\forall x \in [a; b] \quad F'(x) = f(x) \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

إذا كانت f موجبة على $[a; b]$ فان F تزايدية على $[a; b]$

وحيث أن $a \leq b$ فان $F(a) \leq F(b)$ اذن $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

خاصية

لتكن f دالة متصلة على $[a; b]$ ($a \leq b$)

إذا كانت f موجبة على $[a; b]$ فان $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

(b) خاصية

لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a; b]$ ($a \leq b$)

إذا كانت $f \leq g$ على $[a; b]$ فان $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

مثال

$$I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \quad \text{نؤطر}$$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{2} dx \leq I \leq \int_0^1 x^2 dx \quad \text{ومنه} \quad \forall x \in [0; 1] \quad 1 \leq 1+x \leq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^2}{1+x} \leq x^2 \quad \text{لدينا}$$

$$\frac{1}{6} \leq I \leq \frac{1}{3} \quad \text{اذن}$$

(c) خاصيات

أ- لتكن f دالة متصلة على $[a; b]$ ($a \leq b$)

إذا كانت f سالبة على $[a; b]$ فان $\int_a^b f(x) dx \leq 0$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad \text{ب-}$$

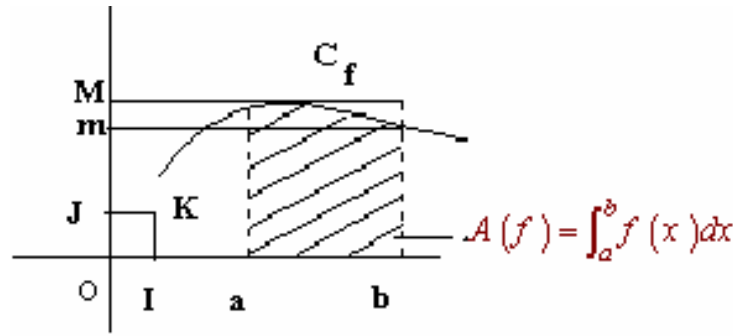
ج- لتكن M القيمة القصوى و m القيمة الدنيا للدالة f على $[a; b]$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

ملاحظة

إذا كانت f موجبة على $[a; b]$ فان المساحة $A(f) = \int_a^b f(x) dx$ في معلم م.م محصورة بين

مساحتي المستطيل الذي بعديه M و $(b-a)$ والمستطيل الذي بعديه m و $(b-a)$.



مثال

نعتبر $I = \int_1^3 \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx$ نبين أن $0 \leq I \leq \sqrt{2}$

الدالة $x \rightarrow \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$ موجبة و تناقصية على $]0; +\infty[$ ومنه $\sup_{x \in [1;3]} f(x) = f(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

اذن $0 \leq I \leq (3-1) \frac{\sqrt{2}}{2}$

2- القيمة المتوسطة لدالة متصلة في قطعة

لتكن f دالة متصلة على $[a; b]$ ($a < b$) و M القيمة القصوية و m القيمة الدنوية للدالة f على $[a; b]$

اذن $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$ ومنه حسب مبرهنة القيمة الوسطية يوجد على الأقل c في $[a; b]$

حيث $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

خاصية و تعريف

لتكن f دالة متصلة على $[a; b]$ ($a \neq b$)

العدد الحقيقي $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ يسمى القيمة المتوسطة للدالة f على $[a; b]$.

يوجد على الأقل c في $[a; b]$ حيث $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

ملاحظة

إذا كانت f موجبة على $[a; b]$ فان المساحة $A(f) = \int_a^b f(x) dx$ في معلم م.م هي مساحة

المستطيل

الذي بعده $(b-a)$ و $f(c)$.

تمرين 1- أحسب القيمة المتوسطة للدالة f على I في الحالتين التاليتين

$I = [0;1]$ $f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 + x + 3}{x+1}$ (b ; $I = [-1;0]$ $f(x) = (x-1)e^x$ (a

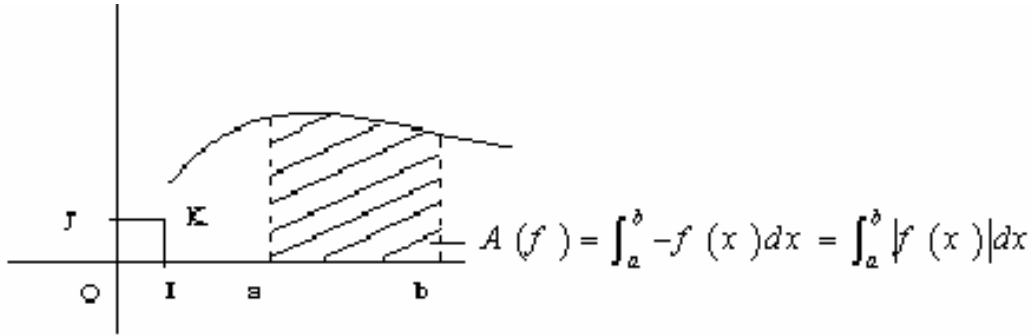
2- أطر الدالة f على $[0;1]$ حيث $f(x) = \arctan x$

الجواب عن السؤال 2 لدينا f قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ و $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ و $\forall x \in [0;1]$ ومنه

$\frac{x}{2} \leq f(x) \leq x \quad \forall x \in [0;1]$ $\int_0^x \frac{1}{2} dt \leq \int_0^x f'(t) dt \leq \int_0^x 1 dt$ اذن $\forall x \in [0;1]$ $\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 1$

1- حساب المساحات الهندسية

المستوى منسوب إلى م.م.م $(o; \vec{i}; \vec{j})$
 لتكن f دالة متصلة على $[a; b]$ و C_f منحناها و $\Delta(f)$ الحيز المحصور بين C_f و محور الأفاصيل
 والمستقيمين $(\Delta_1): x = a$ $(\Delta_2): x = b$



* إذا كانت f موجبة على $[a; b]$ فإن مساحة $\Delta(f)$ هي $\int_a^b f(x) dx$ بوحدة قياس المساحات

* إذا كان f سالبة على $[a; b]$ مساحة هي مساحة $\Delta(-f)$

$$A(f) = \int_a^b -f(x) dx = \int_a^b |f(x)| dx$$

* إذا كانت f تغير إشارتها على $[a; b]$ مثلا يوجد c من $[a; b]$ حيث f موجبة على $[a; c]$ و سالبة على

$[c; b]$

الحيز $\Delta(f)$ على $[a; b]$ هو اتحاد $\Delta(f)$ على $[a; c]$ و $\Delta(f)$ على $[c; b]$

$$A(f) = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b -f(x) dx = \int_a^c |f(x)| dx + \int_c^b |f(x)| dx = \int_a^b |f(x)| dx$$

خاصة

المستوى منسوب الى م.م.م $(o; \vec{i}; \vec{j})$
 لتكن f دالة متصلة على $[a; b]$ و C_f منحناها و $\Delta(f)$ الحيز المحصور بين C_f و محور الأفاصيل
 والمستقيمين $(\Delta_2): x = b$ $(\Delta_1): x = a$

مساحة الحيز $\Delta(f)$ هو $\int_a^b |f(x)| dx$ بوحدة قياس المساحة

اصطلاحات

العدد الموجب $\int_a^b |f(x)| dx$ يسمى المساحة الهندسية للحيز $\Delta(f)$.

العدد الحقيقي $\int_a^b f(x) dx$ يسمى المساحة الجبرية للحيز $\Delta(f)$.

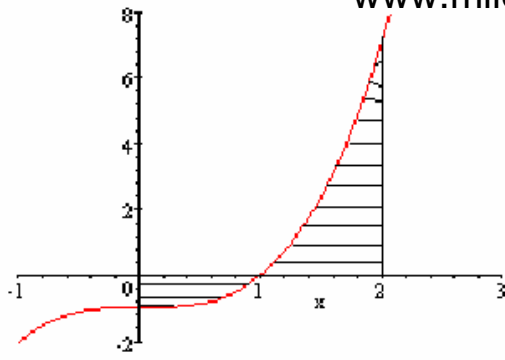
مثال

$$f(x) = x^3 - 1$$

حدد مساحة الحيز المحصور بين المنحنى C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين ذا المعادلتين

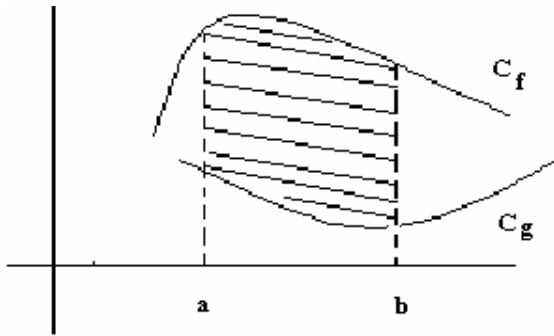
$$x = 2 \quad ; \quad x = 0$$

$$A = \int_0^2 |f(x)| dx = \int_0^1 (1 - x^3) dx + \int_1^2 (x^3 - 1) dx = \frac{7}{2} u \quad (u = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|)$$



-2 مساحة حيز محصور بين منحنين

لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a; b]$ و Δ هو الحيز المحصور بين C_f و C_g و المستقيمين $(\Delta_1): x = a$ و $(\Delta_2): x = b$ في م.م.م $(o; \vec{i}; \vec{j})$



إذا كان $f \geq g \geq 0$ فان $A(\Delta) = A(f) - A(g)$

$$A(\Delta) = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

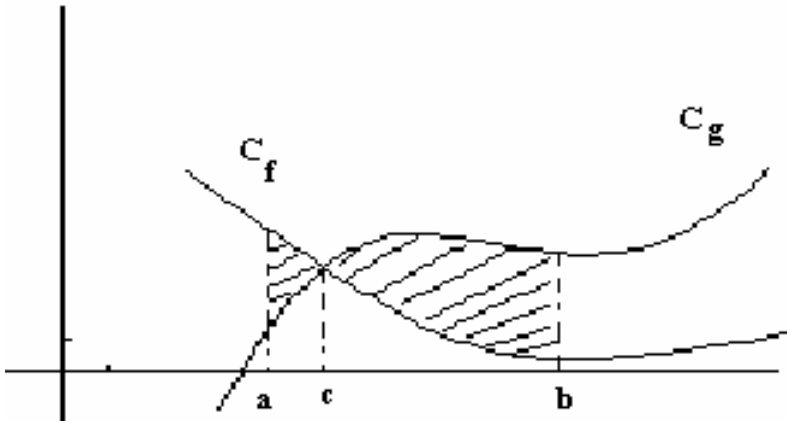
إذا كانت $f \leq g$ و كيفما كانت إشارتي f و g و يتابع نفس الطريقة نحصل على أن

$$A(\Delta) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

خاصية

لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a; b]$
 مساحة الحيز Δ المحصور بين C_f و C_g و المستقيمين $(\Delta_1): x = a$ و $(\Delta_2): x = b$
 هي $A(\Delta) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ وحدة قياس المساحات

ملاحظة



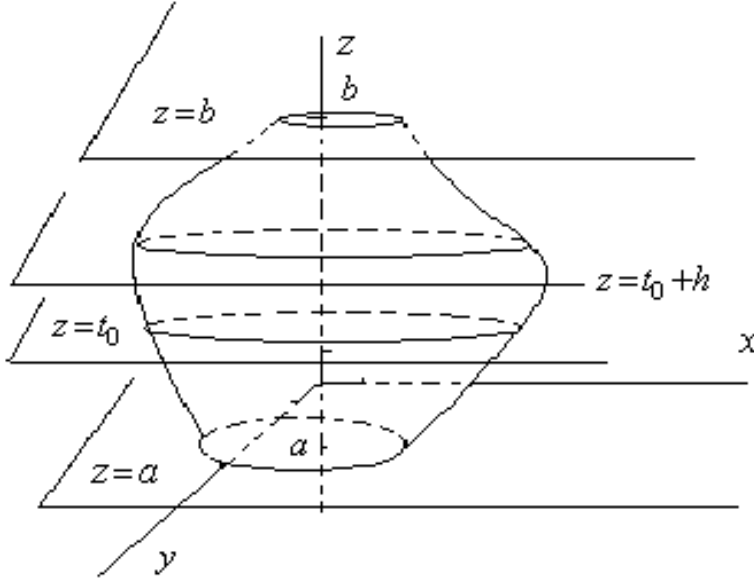
$$A(\Delta) = \int_a^c (f(x) - g(x)) dx + \int_c^b (g(x) - f(x)) dx$$

الفضاء منسوب إلى معلم م.م $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ نفترض أن وحدة قياس الحجم هي حجم المكعب الذي طول حرفه

$\|\vec{i}\|$

1- حجم مجسم في الفضاء

ليكن S مجسما محصورا بين المستويين المعرفين بالمعادلتين $z = a$ و $z = b$
نرمز بـ $S(t)$ إلى مساحة مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من S حيث $z = t$ و بالرمز $V(t)$ إلى حجم مجموعة
النقط من S المحصور بين المستويين $z = a$; $z = t$
ليكن t_0 من $[a; b]$ و h عددا موجبا حيث $t_0 + h \in [a; b]$



حجم مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من S المحصورة بين $z = t_0 + h$ و $z = t_0$ هو $V(t_0 + h) - V(t_0)$
ومن جهة ثانية هذا الحجم محصور بين حجمي الأسطوانتين التي ارتفاعهما h ومساحتا قاعدتيهما
على التوالي $S(t_0)$ و $S(t_0 + h)$

إذا افترضنا أن $S(t_0) \leq S(t_0 + h)$ فإن $h \cdot S(t_0) \leq V(t_0 + h) - V(t_0) \leq h \cdot S(t_0 + h)$

$$S(t_0) \leq \frac{V(t_0 + h) - V(t_0)}{h} \leq S(t_0 + h) \text{ و منه}$$

و إذا افترضنا أن التطبيق $t \rightarrow S(t)$ متصل على $[a; b]$ فإن $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(t_0 + h) - V(t_0)}{h} = S(t_0)$

إذن الدالة $t \rightarrow V(t)$ قابلة للاشتقاق على $[a; b]$ و $V'(t) = S(t)$ $\forall t \in [a; b]$

أي أن الدالة $t \rightarrow V(t)$ دالة أصلية للدالة $t \rightarrow S(t)$ على $[a; b]$

و بما أن $V(a) = 0$ فإن $V(t) = \int_a^t S(x) dx$ $\forall t \in [a; b]$

إذن حجم المجسم S هو $V = V(b) = \int_a^b S(x) dx$ وحدة قياس الحجم .

خاصية

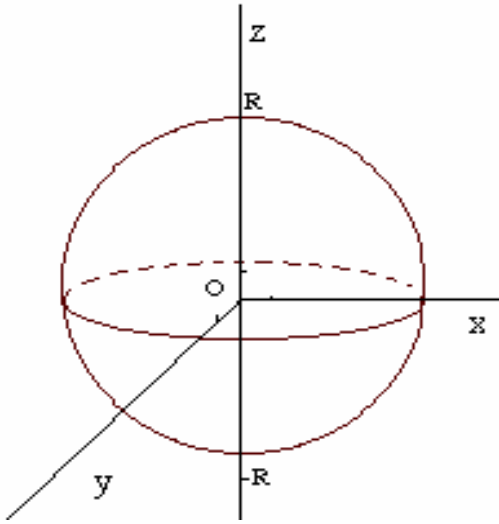
الفضاء منسوب إلى معلم م.م

ليكن S مجسما محصورا بين المستويين المعرفين بالمعادلتين $z = a$ و $z = b$

نرمز بـ $S(t)$ الى مساحة مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من S حيث $z = t$

إذا كان أن التطبيق $t \rightarrow S(t)$ متصلا على $[a; b]$ فإن حجم المجسم S هو $V = \int_a^b S(z) dz$ وحدة قياس الحجم.

تمرين



أحسب حجم الفلكة التي مركزها O و شعاعها R

الحل : نفترض أن الفضاء منسوب م.م.م أصله O .
الفلكة محصورة بين المستويين المعرفين على التوالي
بالمعادلتين $z = -R$; $z = R$

مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفلكة حيث $-R \leq t \leq R$ $z = t$

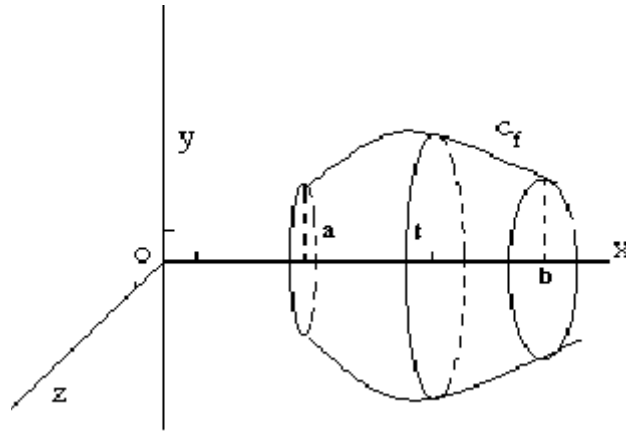
هي قرص شعاعه $\sqrt{R^2 - t^2}$ ومساحته $S(t) = \pi(R^2 - t^2)$

بما أن التطبيق $t \rightarrow \pi(R^2 - t^2)$ متصل على $[-R; R]$ فإن $\frac{4}{3}\pi R^3$

2- حجم مجسم الدوران

لتكن f دالة متصلة على $[a; b]$ و C_f منحناها في م.م.م $(O; \vec{i}; \vec{j})$

إذا دار C_f حول المحور $(O; \vec{i})$ دورة كاملة فانه يولد مجسما يسمى مجسم الدوران



في هذه الحالة لدينا مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الجسم بحيث $x = t$ هي قرص مساحته

$$S(t) = \pi f^2(t)$$

التطبيق $t \rightarrow \pi f^2(t)$ متصل على $[a; b]$

إذن حجم المجسم الدوراني هو $V = \int_a^b \pi f^2(t) dt$

خاصية

الفضاء منسوب إلى م.م.م أصله o , و f دالة متصلة على $[a; b]$

حجم مجسم الدوران المولد عن دوران المنحنى C_f حول المحور (OX) هو $V = \int_a^b \pi f^2(t) dt$ بوحدة قياس الحجم .

تمرين

$$f(x) = \frac{1}{2}x \ln x$$

أنشئ C_f و حدد حجم مجسم الدوران الذي يولده دوران المنحنى C_f حول المحور (OX) في المجال $[1; e]$

IV- حساب بعض النهايات باستعمال التكامل

لتكن f متصلة على $[a; b]$.

$$s_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) ; S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) \quad \text{لكل عنصر } n \text{ من } \mathbb{N}^* \text{ نضع}$$

إذا كانت f رتيبة قطعاً على $[a; b]$ أو قابلة للاشتقاق و f' محدودة على $[a; b]$ فإن المتتاليتين (S_n) و (s_n)

متقاربتين و تقبلان التكامل $\int_a^b f(x) dx$ نهاية مشتركة لهما عندما يؤول n إلى $+\infty$

مثال

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \quad \text{نعتبر}$$

حدد $\lim u_n$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \sum_{k=1}^n f\left(1+\frac{k}{n}\right) \quad \text{لدينا}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{حيث}$$

لدينا f متصلة و تناقصية على $[1; 2]$ ومنه المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ متقاربة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2$

حالة خاصة

المتوسط الحسابي $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$ يؤول الى القيمة المتوسطة $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

تمرين

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^2 + k^2} ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{n} ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}} ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}$$

أحسب النهايات