

الاشتقاق و تطبيقاته - دراسة الدوال

الثانية سلك بكالوريا ع ف - ع ح أ

I- الاشتقاق في نقطة- الدالة المشتقة

(A) أنشطة

نشاط 1 باستعمال التعريف ادرس اشتقاق الدالة f في x_0 و حدد العدد المشتق في x_0 إن وجد ثم حدد معادلة المماس أو نصف المماس لمنحنى الدالة f عند النقطة ذات الأضلاع x_0 في الحالات التالية

أ- $f(x) = x^2 - 2x$ $x_0 = 1$ ب- $f(x) = x^2 - 4$ $x_0 = 2$

ج- $x_0 = 0$ $\begin{cases} f(x) = \sin x & x \leq 0 \\ f(x) = x^3 - 2x & x > 0 \end{cases}$

نشاط 2 حدد الدالة المشتقة f' للدالة f بعد تحديد مجموعة تعريف كل من f و f' في الحالات التالية

أ- $f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 1$ ب- $f(x) = \frac{3x-1}{x^2-1}$

ج- $f(x) = \sin 2x \cos x$ د- $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$ ر- $f(x) = 1 + \tan^2 x$

نشاط 3

حدد $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + \cos \pi x}{x-1}$ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}}$

(B) تذكير

1- الاشتقاق في نقطة

أ- تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة في مجال مفتوح مركزه x_0

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا كانت للدالة $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ نهاية l في x_0 ونرمز لها بـ

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

العدد l يسمى العدد المشتق لـ f في x_0 . نكتب

ب- خاصية

كل دالة قابلة للاشتقاق في x_0 تكون متصلة في x_0

2- الاشتقاق على اليمين - الاشتقاق على اليسار

أ- تعريف

* لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $[x_0; x_0 + \alpha]$ حيث $\alpha > 0$

نقول إن f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 إذا كانت للدالة $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ نهاية l على اليمين في

x_0 ونرمز لها بـ $f'_d(x_0)$.

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

العدد l يسمى العدد المشتق لـ f على اليمين في x_0 نكتب

* لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $[x_x - \alpha; x_0]$ حيث $\alpha > 0$

نقول إن f قابلة للاشتقاق على اليسار في x_0 إذا كانت للدالة $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ نهاية l على اليسار في

x_0 ونرمز لها بـ $f'_g(x_0)$.

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

العدد l يسمى العدد المشتق لـ f على اليسار في x_0 نكتب

ب- خاصية

تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار في x_0 والعدد المشتق على اليمين يساوي العدد المشتق على اليسار.

نقول إن f قابلة للاشتقاق على المجال I إذا كانت f قابلة للاشتقاق في كل نقطة من I .
الدالة التي تربط كل عنصر x من I بالعدد $f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة نرمز لها بـ f' .

ب- عمليات على الدوال المشتقة

*- لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I و $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\forall x \in I \quad (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(\lambda f)' = \lambda f'(x)$$

$$\forall x \in I \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad \left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)}$$

- لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و $n \in \mathbb{N}^ - \{1\}$ و $\forall x \in I$ بحيث g لا تنعدم على I

- لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و $n \in \mathbb{Z}_-$ و f لا تنعدم على I

$$\forall x \in I \quad (f^n)'(x) = n(f(x))^{n-1} \times f'(x)$$

4- الكتابة التفاضلية

إذا كانت $y = f(x)$ و f قابلة للاشتقاق على المجال I فاننا نكتب اصطلاحا $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ أو $dy = f'(x)dx$

هذه الكتابة تسمى: الكتابة التفاضلية.

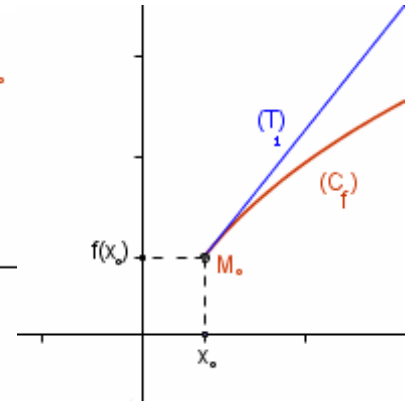
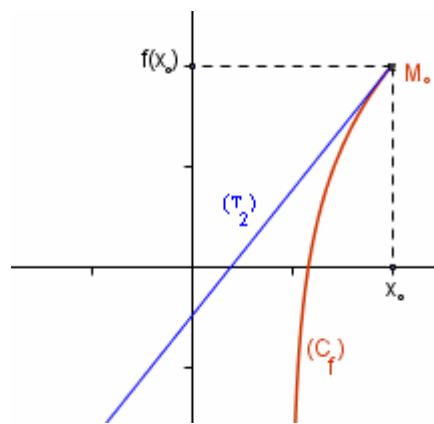
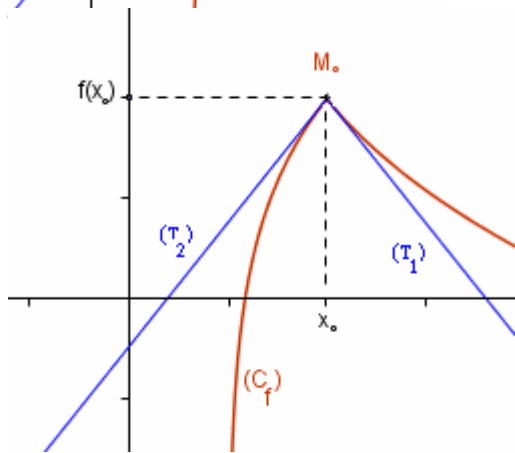
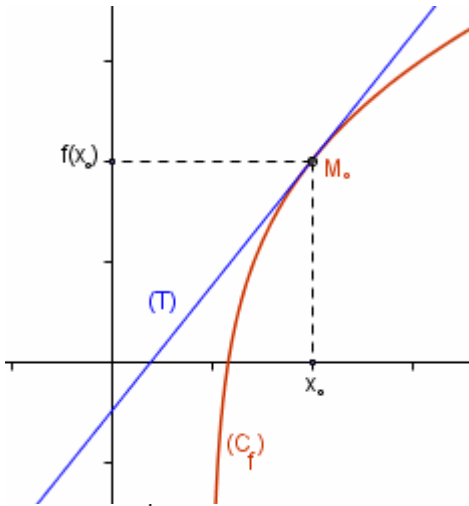
5- التآويل الهندسي - معادلة المماس لمنحنى دالة

أ- المماس

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 و C_f منحنىها
قابلية اشتقاق f في x_0 تؤول هندسيا بوجود مماس لـ C_f
عند النقطة ذات الأفصول x_0 معادلته $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

ب- نصف المماس

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 (أو على اليسار في x_0) فان C_f يقبل نصف مماس عند النقطة ذات الأفصول x_0 معامل الموجه $f'_d(x_0)$ (أو $f'_g(x_0)$)



$$(T_1): y = f'_d(x - x_0) + f(x_0) \quad x \geq x_0$$

$$(T_2): y = f'_g(x - x_0) + f(x_0) \quad x \leq x_0$$

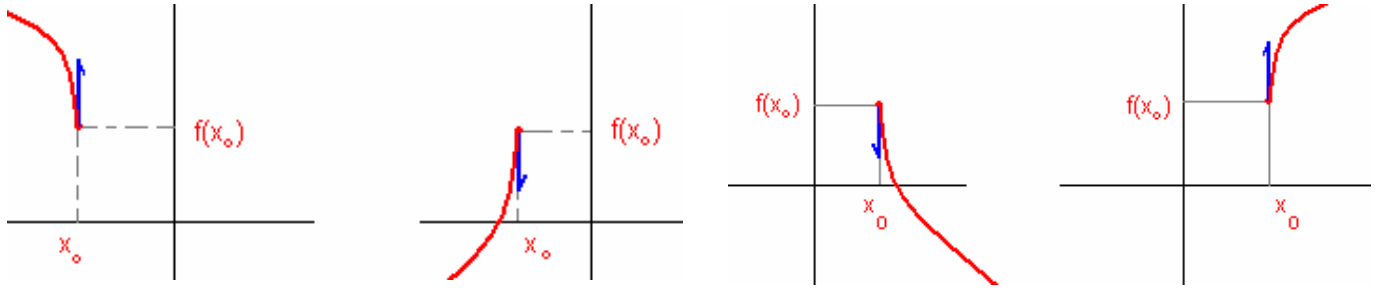
$$\begin{cases} (T_2): y = f'_g(x - x_0) + f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (T_1): y = f'_d(x - x_0) + f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}$$

M_0 نقطة مزواة

إذا كانت f متصلة في x_0 و كان $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ فإن

C_f نصف مماس مواز لمحور الأرتاب.



II- مشتقة دالة مركبة - مشتقة الدالة العكسية

1- مشتقة دالة مركبة

خاصة

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$ إذا كان x_0 عنصرا من I و كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و g قابلة للاشتقاق في $f(x_0)$ فإن $g \circ f$ قابلة للاشتقاق في x_0 .

خاصة

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$

$$\forall x \in I \quad (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$$

نتيجة

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و موجبة قطعاً على I و g دالة معرفة على I بـ $g(x) = \sqrt{f(x)}$ فإن g قابلة للاشتقاق على I و

$$\forall x \in I \quad g'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

تمرين أحسب $f'(x)$ بعد تحديد مجموعة تعريف الدالة المشتقة f' في الحالتين التاليتين

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x} \quad (b) ; \quad f(x) = \cos(x^3 - 4x^2) \quad (a)$$

2- مشتقة الدالة العكسية

خاصة

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعاً على مجال I إذا كان x_0 عنصراً من I و كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و $f'(x_0) \neq 0$ فإن الدالة f^{-1} للاشتقاق في $f(x_0)$ و

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

مثال : نعتبر $f(x) = \tan x \quad \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ نحدد $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ثم $(f^{-1})'(1)$

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\quad f'(x) = 1 + \tan^2 x \quad \text{لدينا} \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

f دالة متصلة ورتيبة قطعاً على مجال $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{2} \quad \text{أي} \quad (f^{-1})'\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)} \quad \text{ومنه} \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \neq 0$$

خاصة

إذا f دالة رتيبة قطعاً و قابلة للاشتقاق على مجال I و f' لا تنعدم على I فإن الدالة f^{-1} قابلة

$$\forall x \in f(I) \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad \text{و} \quad f(I)$$

3- تطبيقات

أ مشتقة دالة الجذر من الرتبة n

لدينا الدالة $f: x \rightarrow x^n$ تزايدية قطعاً وقابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ولا تنعدم على $]0; +\infty[$

$$f'(x) = nx^{n-1} \quad \text{و} \quad f(]0; +\infty[) =]0; +\infty[$$

ومنه الدالة العكسية $f^{-1}: x \rightarrow \sqrt[n]{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(\sqrt[n]{x})} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$$

خاصة

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$. الدالة $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ولدينا $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$

ملاحظة

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n}(\sqrt[n]{x})^{1-n} = \frac{1}{n}\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{1-n} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

$$(\sqrt[n]{x})' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

نتيجة

$$(p; q) \in \mathbb{N}^{*2} \quad \frac{p}{q} \quad \text{حيث} \quad (x^r)' = \left(\sqrt[q]{x^p}\right)' = px^{p-1} \times \frac{1}{q}\left(x^p\right)^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1} = rx^{r-1}$$

نتيجة

ليكن r من \mathbb{Q}^* . الدالة $x \rightarrow x^r$ قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ولدينا $(x^r)' = rx^{r-1}$

تمرين

$$g(x) = x^{\frac{2}{3}} \quad f(x) = x^2 + \sqrt[3]{x}$$

أدرس اشتقاق f و g و حدد الدالتين المشتقتين لهما

خاصة

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و f موجبة قطعاً على I و $n \in \mathbb{N}^*$ فان الدالة $x \rightarrow \sqrt[n]{f(x)}$

$$\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)' = \frac{1}{n}\left(f(x)\right)^{\frac{1}{n}-1} \cdot f'(x) \quad \forall x \in I \quad \left(\sqrt[n]{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{n\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)^{n-1}}$$

نتيجة

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و f موجبة قطعاً على I و $r \in \mathbb{Q}$.

$$\forall x \in I \quad \left((f(x))^r\right)' = r(f(x))^{r-1} \cdot f'(x)$$

أحسب الدالة المشتقة f' للدالة f بعد تحديد D_f و $D_{f'}$ في كل حالة من الحالات التالية

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x} - 1 \quad \text{مع إعطاء جدول التغيرات} \quad f(x) = \sqrt[3]{(2x-1)^2} - 2 \quad f(x) = (\sqrt[3]{2x-1})^2 - 2$$

$$f(x) = (x^2 - 1)^{\frac{2}{5}} - 3 \quad f(x) = \left((x^2 - 1)^2\right)^{\frac{1}{5}} - 4$$

الدالة \arctan هي الدالة العكسية للدالة f المعرفة من $\left] \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ نحو \mathbb{R} بـ $f(x) = \tan x$

بما أن f قابلة للاشتقاق و موجبة قطعاً على $\left] \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ ($f'(x) = 1 + \tan^2 x$) فإن الدالة \arctan قابلة

للاشتقاق على \mathbb{R} و $\arctan'x = \frac{1}{f'(\arctan x)} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{x^2 + 1}$

خاصية

* الدالة \arctan قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و $\arctan'x = \frac{1}{x^2 + 1}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

خاصية

* إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على I فإن الدالة $\arctan \circ u$ قابلة للاشتقاق على I

و $\forall x \in I \quad (\arctan \circ u(x))' = \frac{u'(x)}{1 + (u(x))^2}$

تمرين 1 - أحسب مشتقة f بعد تحديد حيز تعريفها في الحالتين

$$f(x) = \arctan \sqrt[3]{x} \quad f(x) = \arctan \sqrt{\frac{2-x}{x}}$$

2- حدد $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^2 + 3x)}{x}$

جدول مشتقات بعض الدوال

$D_{f'}$	$f'(x)$	$f(x)$
\mathbb{R}	0	a
\mathbb{R}	1	x
\mathbb{R}^*	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$
\mathbb{R}	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \quad x^n$
\mathbb{R}^*	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{Z}^{*-} \quad x^n$
$]0; +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	\sqrt{x}
$\{x \in D_u / u(x) > 0\}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$\sqrt{u(x)}$
$]0; +\infty[$	$\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$	$n \in \mathbb{N}^* \quad x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$
$\{x \in D_u / u(x) > 0\}$	$\frac{u'(x)}{n(\sqrt[n]{u(x)})^{n-1}}$	$\sqrt[n]{u(x)}$
$]0; +\infty[$	rx^{r-1}	$r \in \mathbb{Q} \quad x^r$
\mathbb{R}	$-\sin x$	$\cos x$
\mathbb{R}	$\cos x$	$\sin x$

$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$	$1 + \tan^2 x$	$\tan x$
\mathbb{R}	$-a \sin(ax + b)$	$\cos(ax + b)$
\mathbb{R}	$a \cos(ax + b)$	$\sin(ax + b)$
\mathbb{R}	$\frac{1}{x^2 + 1}$	$\arctan x$
$D_{u'}$	$\frac{u'(x)}{(u(x))^2 + 1}$	$\arctan(u(x))$

III- الدوال الأصلية

تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I . نقول إن دالة F هي دالة أصلية للدالة f على I إذا كانت F قابلة للاشتقاق على I وكان $\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$

أمثلة

الدالة $F : x \rightarrow x^2 + 2x$ دالة أصلية للدالة $f : x \rightarrow 2x + 2$ على \mathbb{R}
 الدالة $F : x \rightarrow \cos x + 3$ دالة أصلية للدالة $f : x \rightarrow -\sin x$ على \mathbb{R}

خاصة

لتكن f دالة عددية تقبل دالة أصلية F على مجال I هي المجموعة المكونة من الدوال $F + \lambda$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$.

أمثلة

- الدالة $F : x \rightarrow x^2 + 2x$ دالة أصلية للدالة $f : x \rightarrow 2x + 2$ على \mathbb{R}
 إذن الدوال الأصلية لـ f هي الدوال F_λ المعرفة على \mathbb{R} بـ $F_\lambda(x) = x^2 + 2x + \lambda$

خاصة

لتكن f دالة عددية تقبل دالة أصلية على مجال I ليكن x_0 من I و y_0 من \mathbb{R} توجد دالة أصلية وحيدة G للدالة f على مجال I بحيث $G(x_0) = y_0$.

مثال

نحدد دالة أصلية للدالة f على \mathbb{R} حيث $f(x) = x^3 - 2x + 3$ التي تأخذ القيمة 2 عند 1

خاصة

إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالتين f و g على مجال I على التوالي وكان $\lambda \in \mathbb{R}$ فإن
 $* F + G$ دالة أصلية لـ $f + g$
 $* \lambda F$ دالة أصلية لـ λf

خاصة

كل دالة متصلة على مجال I تقبل دالة أصلية على I

مثال بين أن f تقبل دالة أصلية على \mathbb{R} و حدد الدوال الأصلية لـ f .

$$\begin{cases} f(x) = x - 3 & x \geq 2 \\ f(x) = x^2 - 5 & x < 2 \end{cases}$$

جدول الدوال الأصلية لبعض الدوال الاعتيادية

مجموعة التعريف I للدالة f و الدوال F	الدوال الأصلية F	الدالة f
$I = \mathbb{R}$	λ	0
$I = \mathbb{R}$	$ax + \lambda$	a
$I = \mathbb{R}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + \lambda$	$n \in \mathbb{N}^* \quad x^n$
$I = \mathbb{R}_-^*$ ou $I = \mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + \lambda$	$n \in \mathbb{Z}^* - \{-1\} \quad x^n$

$I = \mathbb{R}_-^*$ ou $I = \mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + \lambda$	$n \in \mathbb{Z}^* - \{-1\}$ x^n
\mathbb{R}_+^*	$\frac{1}{r+1}x^{r+1} + \lambda$	$r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\}$ x^r
$I = \mathbb{R}$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b) + \lambda$	$\cos(ax+b)$ $a \neq 0$
$I = \mathbb{R}$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b) + \lambda$	$\sin(ax+b)$ $a \neq 0$
$I = \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[; k \in \mathbb{Z}$	$\tan x + \lambda$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$I = \mathbb{R}$	$\arctan x + \lambda$	$\frac{1}{x^2 + 1}$
I هو المجال التي تكون فيه f^r معرفة و f قابلة للاشتقاق	$\frac{1}{r+1}f^{r+1} + \lambda$	$r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\}$ $f^r \cdot f'$
I هو المجال التي تكون فيه g و f قابلتان للاشتقاق	$f + g + \lambda$	$f + g$
I هو المجال التي تكون فيه g و f قابلتان للاشتقاق	$fg + \lambda$	$f'g + fg'$
I هو المجال التي تكون فيه g و f قابلتان للاشتقاق و لا تنعدم فيه g	$\frac{f}{g} + \lambda$	$\frac{f'g - fg'}{g^2}$

تمارين

1- حدد دالة أصلية للدالة f على $]1; +\infty[$ $f(x) = x(x^2 - 1)^{\frac{1}{3}} - 1$

(لاحظ أن $f(x) = \alpha u'(x)(u(x))^n$ حيث α و n معلومين)

2- حدد دوال أصلية للدالة f على \mathbb{R} $f(x) = \frac{3}{4x^2 + 4x + 2}$

(باستعمال الشكل القانوني نحصل على $f(x) = \alpha \frac{u'(x)}{(u(x))^2 + 1}$)

3- حدد دوال أصلية للدالة f على \mathbb{R} $f(x) = \cos^3 x$

(يتم اخطاط $f(x)$ بوضع $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$)

IV- تطبيقات الاشتقاق - دراسة الدوال

A - الأنشطة

تمرين 1

1- حدد رتبة الدالة f و مطايرفها النسبية أو المطلقة إن وجدت في الحالتين التالين.

أ- $f(x) = x(x-3)^2$ ب- $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$

2- حدد عدد جذور المعادلة $x^3 + 2x^2 - 7x + 1 = 0$

تمرين 2

أدرس تقعر C_f منحنى الدالة و حدد نقط انعطافه في الحالتين التاليتين (إن كان ممكنا).

أ- $f(x) = x^4 - 2x^3 - 13x$ ب- $f(x) = \cos x - \sin x$

ج- $f(x) = x|x|$ (لاحظ أن f غير قابلة للاشتقاق مرتين في 0 ومع ذلك تقبل نقطة انعطاف في $O(0;0)$)

تمرين 3

- حدد المقاربات إن وجدت
- أعط الاتجاهات المقاربة في الحالات التالية

أ- $f(x) = \frac{x^2 + 1}{-2x^2 + x + 3}$ ب- $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ ج- $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x-1}$ د- $f(x) = x + \sqrt{x}$

ر- $f(x) = x + \sin 2\pi x$

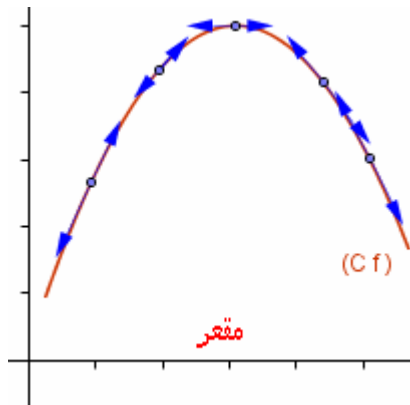
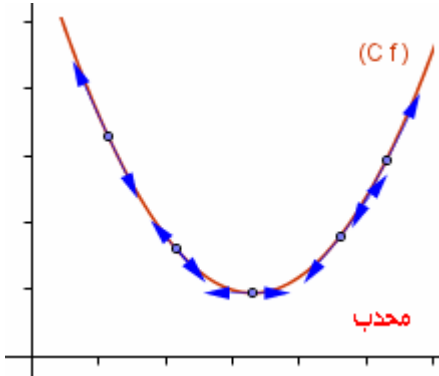
تمرين 4

- 1- نعتبر $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 3$ بين ان $A(1;2)$ مركز تماثل للمنحنى C_f
- 2- نعتبر $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$
- بين ان المستقيم الذي معادلته $x = \frac{5}{2}$ محور تماثل للمنحنى C_f

B- تذكير مع بعض الاضافات

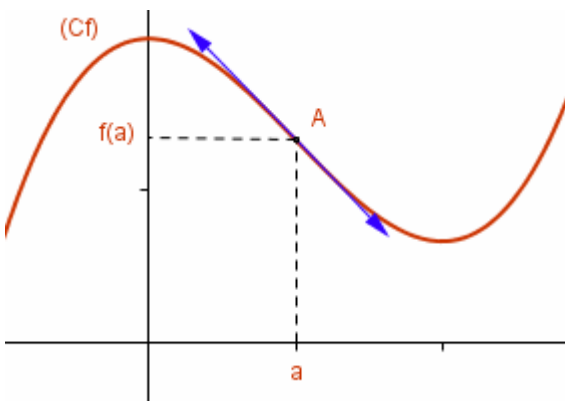
1-1- تعريف

لتكن f قابلة للاشتقاق على مجال I
نقول إن المنحنى (C_f) محدب إذا كان يوجد فوق جميع مماساته
نقول إن المنحنى (C_f) مقعر إذا كان يوجد تحت جميع مماساته



2-1- خاصيات

- * إذا كانت f موجبة على I فان (C_f) يكون محدبا على I
- * إذا كانت f سالبة على I فان (C_f) يكون مقعرا على I
- * إذا كانت f تنعدم في x_0 من المجال I وكان يوجد $\alpha \in \mathbb{R}_+$ بحيث إشارة f على $[a; a+\alpha[$ مخالفة لإشارة f على $]a-\alpha; a]$ فان $A(a; f(a))$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)



ملاحظة قد لا تكون الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين ويكون مع ذلك لمبيانها نقطة انعطاف

2 الفروع اللانهائية

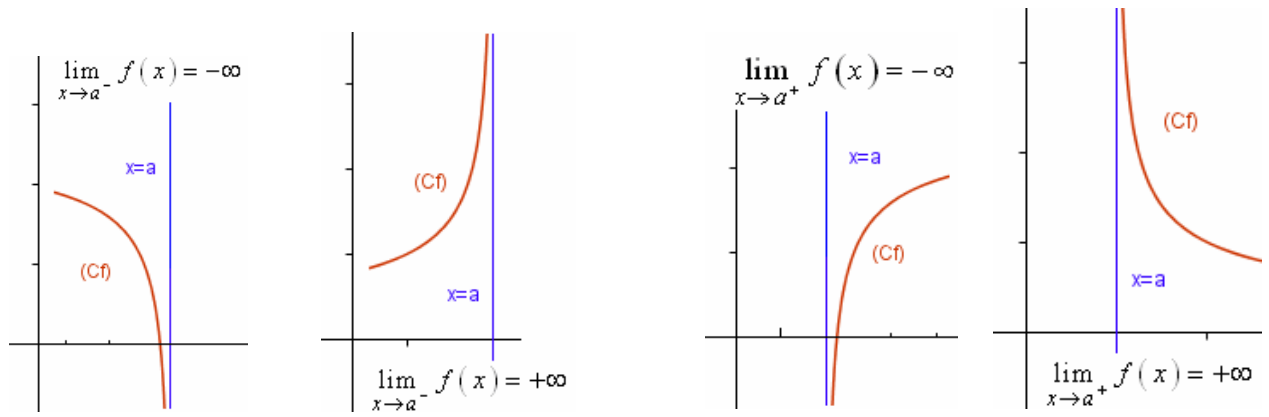
1-2- تعريف

إذا آلت إحدى إحداثيتي نقطة من C منحنى دالة إلى اللانهاية فإننا نقول إن C يقبل فرعا لانهايا.

2-2- مستقيم مقارب لمنحنى

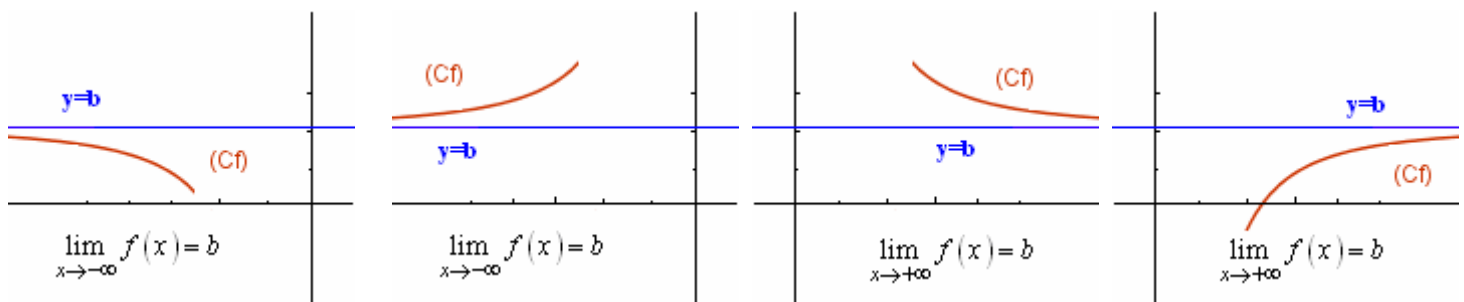
-a مقارب عمودي

إذا كان $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$ فإن المستقيم الذي معادلته $x = a$ مقارب لـ (C_f)



-b مقارب أفقي

إذا كان $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$ فإن المستقيم الذي معادلته $y = b$ مقارب لـ (C_f)



-c مقارب عمودي

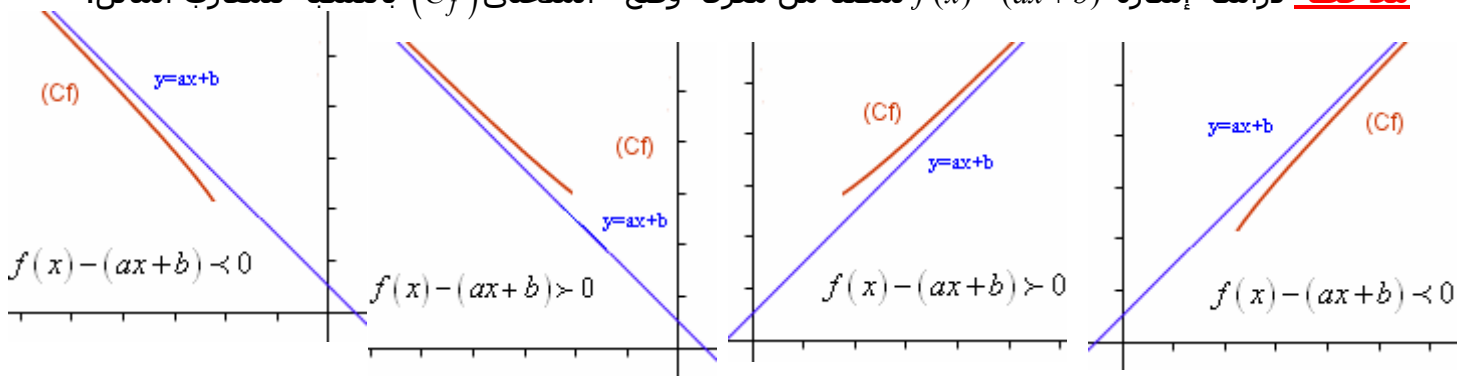
يكون المستقيم الذي معادلته $y = ax + b$ مقارب للمنحنى (C_f) إذا وفقط إذا كان $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$

خاصة

يكون المستقيم الذي معادلته $y = ax + b$ مقارب للمنحنى (C_f) إذا وفقط إذا كان

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = b ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{أو} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

ملاحظة دراسة إشارة $f(x) - (ax + b)$ تمكننا من معرفة وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمقارب المائل.



2-3- الاتجاهات المقاربة

تعريف

أ - إذا كان $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ نقول إن (C_f) يقبل محور الأرتاب كاتجاه مقارب.

ب - إذا كان $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ نقول إن (C_f) يقبل محور الافاصل كاتجاه مقارب.

ج - إذا كان $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ و $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - ax = \pm\infty$ نقول إن (C_f) يقبل المستقيم ذا المعادلة $y = ax$ كاتجاه مقارب

3 - مركز تماثل - محور تماثل

3-1 خاصة

في معلم متعامد , يكون المستقيم الذي معادلته $x = a$ محور تماثل لمنحنى دالة f إذا وفقط إذا كان $\forall x \in D_f \quad f(2a - x) = f(x)$

3-2 خاصة

في معلم متعامد, تكون النقطة $E(a; b)$ مركز تماثل لدالة f إذا وفقط إذا كان $\forall x \in D_f \quad f(2a - x) = 2b - f(x)$

4- الدالة الدورية

4-1 تعريف

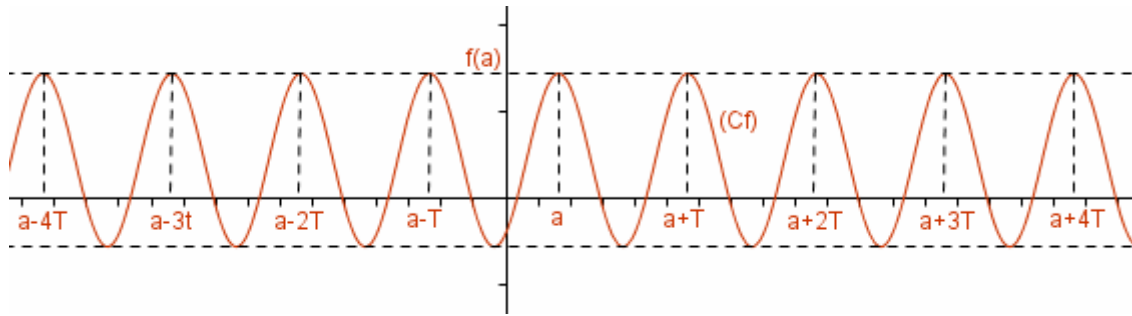
نقول أن f دالة دورية إذا وجد عدد حقيقي T موجب قطعاً ب حيث $\forall x \in D_f \quad x+T \in D_f; \quad x-T \in D_f \quad f(x+T) = f(x)$ العدد T يسمى دور الدالة f . اصغر دور موجب قطعاً يسمى دور الدالة f

4-2 خاصة

إذا كانت للدالة f دور T فإن $\forall x \in D_f, \forall n \in \mathbb{Z} \quad f(x+nT) = f(x)$

4-3 خاصة

إذا كانت f دالة دورية و T دوراً لها فإن منحنى الدالة f على $[a+nT; a+(n+1)T[$ هو صورة منحنى الدالة على $[a, a+T[$ بواسطة الإزاحة ذات المتجهة $nT \cdot \vec{i}$ حيث n عدد صحيح نسبي.



C- دراسة الدوال

تصميم دراسة دالة

لدراسة دالة f في غالب الأحيان نتبع الخطوات التالية

- تحديد مجموعة التعريف ثم تحديد مجموعة الدراسة (خاصة إذا كانت f زوجية أو فردية أو دورية)
- دراسة الاتصال و الاشتقاق و تحديد الدالة الاشتقاق و دراسة إشارتها بالإضافة إلى التأويلات الهندسية
- وضع جدول التغيرات
- دراسة الفروع الانهائية و تحديد المقاربات
- دراسة التقعر إن كان ذلك ضرورياً و تحديد نقط انعطاف إن وجدت
- إنشاء المنحنى