تمارين حول التكامل – دراسة الدوال معرفة بالتكامل

تمارين وحلول

تمرين1

-1 أحسب $\int_1^2 \frac{dt}{t(t+2)}dt$ ثم $\int_1^2 \frac{\ln(2+t)}{t^2}dt$

2 نضع $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 x dx$; $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2 x dx$

أحسب $I+J$

أحسب $I-J$ ثم استنتج I و J

الحل

-1 نحسب $\int_1^2 \frac{dt}{t(t+2)}dt$ ثم $\int_1^2 \frac{\ln(2+t)}{t^2}dt$

$$\int_1^2 \frac{1}{t(t+2)}dt=\int_1^2 \frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}dt=\left[\ln t-\ln(t+2)\right]_1^2=\ln 2-\ln 4+\ln 3=\ln\frac{3}{2}$$

نحسب $\int_1^2 \frac{\ln(2+t)}{t^2}dt$

نضع $v'(x)=\frac{1}{x^2}$; $u(x)=\ln(2+x)$ ومنه $v(x)=-\frac{1}{x}$; $u'(x)=\frac{1}{x+2}$

$$\int_1^2 \frac{\ln(2+t)}{t^2}dt=\left[-\frac{\ln(2+t)}{t}\right]_1^2-\int_1^2\frac{-1}{t(t+2)}dt=\frac{-\ln 2}{2}+\ln 3+\ln\frac{3}{2}=2\ln 3-\frac{3\ln 2}{2}$$

-2 نحسب

$$J+I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2 xdx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{24}$$

نحسب $I-J$ ثم نستنتج I و J

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 xdx-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx$$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos 2xdx=\left[x^2\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2xdx$$

$$I-J=\left[x^2\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[-x\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\cos 2x}{2}dx$$

$$I-J=\left[x^2\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[-x\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[-\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I-J=\frac{-\pi}{4}$$

لدينا $I-J=\frac{-\pi}{4}$ و $I+J=\frac{\pi^3}{24}$ ومنه $I=\frac{\pi^3}{48}-\frac{\pi}{8}$ و $J=\frac{\pi^3}{48}+\frac{\pi}{8}$

تمرين2

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^x\left(1-e^x\right)$

1- حدد $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

2- أحسب $f'(x)$ و أعط جدول تغيرات f و أنشئ C_f

3- حدد المساحة A_k المحصور بين C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=0$; $x=k$ حيث k عدد حقيقي سالب (يمكن اعتبار $t=e^x$)

4- حدد $\lim\limits_{k\to-\infty}A_k$

الحل

$$f(x)=e^x\left(1-e^x\right)$$

1- نحدد $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x\left(1-e^x\right)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x\left(1-e^x\right)=0$

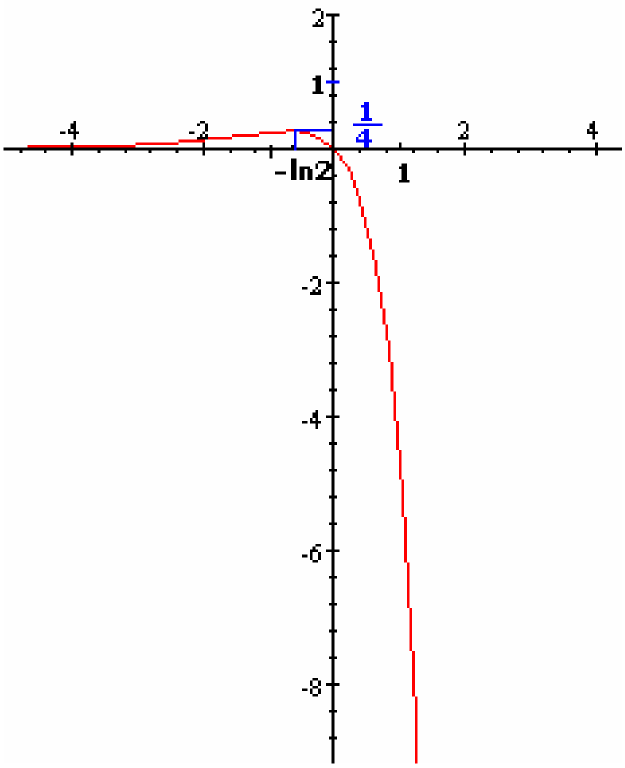
$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}\left(1-e^x\right)=-\infty$;

2- أنسب $f'(x)$ و نعطي جدول تغيرات f و أنشئ C_f

$$f'(x)=\left[e^x-e^{2x}\right]'=e^x-2e^{2x}=e^x\left(1-2e^x\right)$$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
f	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	$-\infty$



3- نحدد المساحة A_k

$$A_k=\int_k^0 f(x)dx=\int_k^0 e^x-e^{2x}dx=\left[e^x-\frac{1}{2}e^{2x}\right]_k^0=\frac{1}{2}-e^k+\frac{1}{2}e^{2k}$$

4- نحدد $\lim\limits_{k\to-\infty} A_k$

$$\lim_{k\to-\infty} A_k=\lim_{k\to-\infty}\frac{1}{2}-e^k+\frac{1}{2}e^{2k}=\frac{1}{2}$$

تمرين3

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة بـ $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n=\sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!\cdot n^n}}$

1- بين أن $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \ln(u_n)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(1+\dfrac{i}{n}\right)$

2- بين أن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=4e^{-1}$

الحل

1- نبين أن $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \ln(u_n)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(1+\dfrac{i}{n}\right)$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \ln u_n=\ln\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!\cdot n^n}}$$

$$=\frac{1}{n}\ln\left(\frac{(n+1)(n+2)\dots\dots(n+n)}{\underbrace{n.n.n.n.n\dots\dots n}_{n\text{ facteurs egaux à n}}}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)\dots\cdot\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \ln(u_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)$$

2- نبين أن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=4e^{-1}$

لدينا $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \ln(u_n)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(1+\dfrac{i}{n}\right)$

و الدالة $x\to\ln(1+x)$ متصلة على $[0;1]$ و تزايدية قطعا على $[0;1]$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln u_n=\int_0^1\ln(1+x)dx=\left[(x+1)\ln(x+1)-x\right]_0^1=2\ln2-1=\ln4e^{-1}$

إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=4e^{-1}$

تمرين4

نعتبر المعادلة التفاضلية $(E): \quad y''+2y'+2y=-(x+1)e^{-x}+2$

1- أ) تأكد أن الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $u(x)=\int_0^x te^{-t}dt$ حل خاص للمعادلة (E)

ب- حل المعادلة (E)

2- نعتبر المتتالية المعرفة بما يلي $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}e^{\frac{-k}{n}}$

حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

الحل

$$(E): \quad y''+2y'+2y=-(x+1)e^{-x}+2$$

2- أ) نتأكد أن الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $u(x)=\int_0^x te^{-t}dt$ حل خاص للمعادلة (E)

لدينا $u'(x)=xe^{-x}$ و $u''(x)=e^{-x}-xe^{-x}$

$$u(x)=\int_0^x te^{-t}dt=\left[-te^{-t}\right]_0^x+\int_0^x e^{-t}dt=\left[-te^{-t}\right]_0^x+\left[-e^{-t}\right]_0^x$$

$$u(x)=-xe^{-x}-e^{-x}+1$$

$$u''(x)+2u'(x)+2u(x)=e^{-x}-xe^{-x}+2xe^{-x}+2\left(-xe^{-x}-e^{-x}+1\right)=-(x+1)e^{-x}+2$$

إذن الدالة u حل خاص للمعادلة (E)

ب- نحل المعادلة (E)

المعادلة المميزة للمعادلة (E) هي $q^2+2q+2=0$

$\Delta'=-3$ ومنه $q=-1\mp i\sqrt{3}$

اذن مجموعة حلول المعادلة (E) هي الدوال المعرفة

بـ $x\to e^{-x}\left(\alpha\cos\sqrt{3}x+\beta\sin\sqrt{3}x\right)-(x+1)e^{-x}+1$

3- نعتبر المتتالية المعرفة بما يلي $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}e^{\frac{-k}{n}}$

نحدد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}e^{\frac{-k}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}e^{\frac{-k}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \quad / \quad f(x)=xe^{-x}$$

f متصلة في $[0;1]$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\int_0^1 xe^{-x}dx=\left[-(x+1)e^{-x}+1\right]_0^1=-2e^{-1}+1$

تمرين5 (تمرين من الامتحان التجريبي لثانوية البارودي عين السبع البيضاء 2004)

نعتبر الدالة F المعرفة على $[0;+\infty[$ بما يلي:

$$F(0)=\ln(2) \quad ; \quad \forall x \succ 0 \quad F(x)=\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt$$

1- بين أن $\forall x \geq 0 \quad e^x \ln 2 \leq F(x) \leq e^{2x} \ln 2$

2- استنتج أن F متصلة في 0 على اليمين.

3- أحسب $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$ و أول النتيجة هندسيا.

4- بين أن F قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و أن $\forall x \in]0;+\infty[\quad F'(x)=\frac{e^{2x}-e^x}{x}$

5- نعتبر الدالة f المعرف على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{e^x-1}{x} \quad \forall x \succ 0$ و $f(0)=1$

أ) بين أن f متصلة في 0 على اليمين.

ب) أدرس قابلية اشتقاق f على يمين 0 و أول ذلك هندسيا

(نقبل أن $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-x-1}{x^2}=\frac{1}{2}$)

ج) بين أن f تزايدية قطعا على $[0;+\infty[$

6- ليكن $x \succ 0$ بين أنه يوجد c من $]0;x[$ حيث $f(c).e^c=\frac{F(x)-\ln 2}{x}$

7- استنتج قابلية اشتقاق F في 0 على اليمين و أول ذلك هندسيا.

8- أنشئ المنحنى (C_F) في معلم متعام ممنظم. نأخذ $F(1)\simeq 3 \quad ; \quad \ln 2 \simeq 0,7$

الحل

نعتبر الدالة F المعرفة على $[0;+\infty[$ بما يلي:

$$F(0)=\ln(2) \quad ; \quad \forall x \succ 0 \quad F(x)=\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt$$

1- نبين أن $\forall x \geq 0 \quad e^x \ln 2 \leq F(x) \leq e^{2x} \ln 2$

من أجل $x=0$ المتفاوتة بديهية

ليكن $x \in]0;+\infty[$

$$x \leq t \leq 2x \Leftrightarrow e^x \leq e^t \leq e^{2x} \Leftrightarrow \frac{e^x}{t} \leq \frac{e^t}{t} \leq \frac{e^{2x}}{t}$$

$$\Leftrightarrow \int_x^{2x} \frac{e^x}{t}dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^{2x}}{t}dt$$

$$\Leftrightarrow e^x [\ln t]_x^{2x} \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt \leq e^{2x} [\ln t]_x^{2x}$$

$$\Leftrightarrow e^x [\ln 2x - \ln x] \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt \leq e^{2x} [\ln 2x - \ln x]$$

$$\Leftrightarrow e^x \ln 2 \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt \leq e^{2x} \ln 2$$

إذن $\forall x\geq 0 \quad e^{x}\ln 2\leq F(x)\leq e^{2x}\ln 2$

-2 نستنتج أن F متصلة في 0 على اليمين.

لدينا $\forall x\geq 0 \quad e^{x}\ln 2\leq F(x)\leq e^{2x}\ln 2$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{x}\ln 2=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{2x}\ln 2=\ln 2=F(0)$

إذن F متصلة في 0 على اليمين.

-3 أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$ و أول النتيجة هندسيا.

لدينا $\forall x\geq 0 \quad e^{x}\ln 2\leq F(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}\ln 2=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=+\infty$

$\forall x\succ 0 \quad \frac{e^{x}}{x}\ln 2\leq\frac{F(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}\ln 2=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=+\infty$

إذن C_F يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب

-4 نبين أن F قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و أن $\forall x\in\,]0;+\infty[\quad F'(x)=\frac{e^{2x}-e^{x}}{x}$

$t\to\frac{e^{t}}{t}$ متصلة على $]0;+\infty[$ و $\forall x\succ 0 \quad F(x)=\int_0^{2x}\frac{e^{t}}{t}dt-\int_0^{x}\frac{e^{t}}{t}dt$

ومنه F قابلة للاشتقاق في $]0;+\infty[$ و $\forall x\succ 0 \quad F'(x)=2\frac{e^{2x}}{2x}-\frac{e^{x}}{x}=\frac{e^{2x}-e^{x}}{x}$

-5 نعتبر الدالة f المعرف على $[0;+\infty[$ بـ: $\forall x\succ 0 \quad f(x)=\frac{e^{x}-1}{x}$ و $f(0)=1$

a. نبين أن f متصلة في 0 على اليمين.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{x}-1}{x}=1=f(0)$ إذن f متصلة في 0 على اليمين.

b. ندرس قابلية اشتقاق f على يمين 0 و نؤول ذلك هندسيا

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{e^{x}-1}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x}-x-1}{x^2}=\frac{1}{2}$$ (نقبل أن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-x-1}{x^2}=\frac{1}{2}$)

C_f يقبل نصف مماس على يمين 0 معامله الموجه $\frac{1}{2}$

ج) نبين أن f تزايدية قطعا على $[0;+\infty[$

$$\forall x\succ 0 \quad f'(x)=\frac{e^{x}x-e^{x}+1}{x^2}$$

نضع $h(x)=xe^{x}-e^{x}+1$ ومنه $h'(x)=xe^{x}\succ 0 \quad \forall x\succ 0$ و بالتالي h تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$

وحيث $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=\lim\limits_{x\to 0} xe^{x}-e^{x}+1=0$ فان $h(x)\succ 0 \quad \forall x\succ 0$

و بالتالي $f'(x)\succ 0 \quad \forall x\succ 0$ إذن f تزايدية قطعا على $[0;+\infty[$

-6 ليكن $x\succ 0$ نبين أنه يوجد c من $]0;x[$ حيث $f(c).e^{c}=\frac{F(x)-\ln 2}{x}$

ليكن $x\succ 0$

لدينا F متصلة $[0;x]$ و F قابلة للاشتقاق على $]0;x[$

ومنه حسب مبرهنة التزايدات المنتهية

يوجد c من $]0;x[$ حيث $F(x)-F(0)=xF'(c)=x\dfrac{e^{2c}-e^{c}}{c}=xe^{c}f(c)$

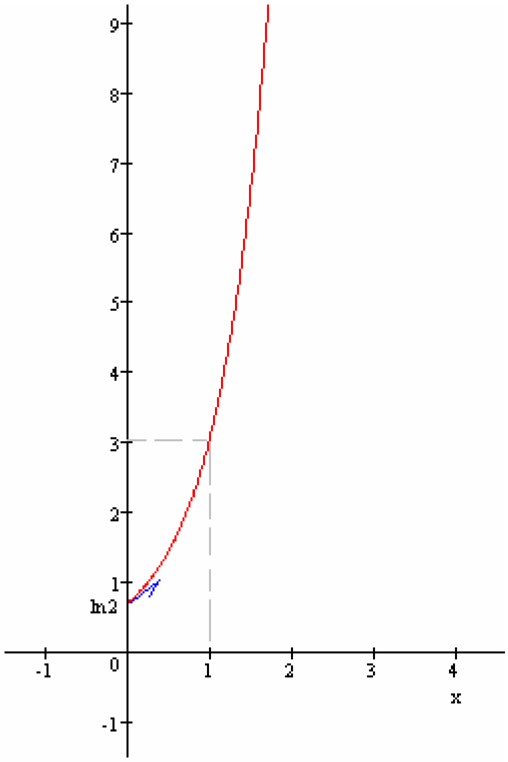
أي $F(x)-\ln 2=xe^{c}f(c)$ إذن $f(c).e^{c}=\dfrac{F(x)-\ln 2}{x}$

7- نستنتج قابلية اشتقاق F في 0 على اليمين و نؤول ذلك هندسيا.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-\ln 2}{x}=\lim_{c\to 0^+}f(c).e^{c}=\lim_{c\to 0^+}e^{c}\frac{e^{c}-1}{c}=1$$

F قابلة للاشتقاق على يمين 0 و تقبل نصف مماس معامله الموجه 1 عند النقطة ذات الافصول0

8- ننشئ المنحنى (C_F) في معلم متعامد ممنظم. نأخذ $F(1)\simeq 3$; $\ln 2\simeq 0,7$



تمرين6

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة بما يلي

$$\begin{cases} f(x)=e^{\frac{1}{\ln x}} & x\in\mathbb{R}_+^*-\{1\} \\ f(0)=1 & ; \quad f(1)=0 \end{cases}$$

(A) ليكن C_f منحنى f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- أدرس اتصال f في 1 و اشتقاق f على يمين 0 ثم على يسار1

2- أدرس تغيرات الدالة f

3- أ) بين أن المستقيم $(D): y=x$ محور تماثل للمنحنى C_f

ب) حدد نقطة تقاطع C_f و(D)

ج) أنشئ المنحنى C_f

(B) نعتبر الدالة العددية F المعرفة بـ: $F(x)=\int_x^{x+1} f(t)\,dt \quad \forall x \cup]1;+\infty[$

1- أ) بين أنه $f(x+1)\leq F(x)\leq f(x) \quad \forall x]1;+\infty[$

ب) استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

2- أ) بين أن $e^u \geq u+1 \quad \forall u\in]0;+\infty[$

ب) استنتج أنه $F(x)-1\geq \int_x^{x+1}\frac{1}{\ln t}dt \quad \forall x\in]1;+\infty[$

ج) بين أن $\ln t\leq t-1 \quad \forall t\in]0;+\infty[$

د) استنتج أن $\int_x^{x+1}\frac{1}{\ln t}dt\geq \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \quad \forall x\in]1;+\infty[$

ه) حدد $\lim\limits_{x\to 1^+} F(x)$

3- أدرس تغيرات F

4- أنشئ منحنى الدالة F في المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

الحل

$$\begin{cases} f(x)=e^{\frac{1}{\ln x}} & x\in\mathbb{R}_+^*-\{1\} \\ f(0)=1 & ; \quad f(1)=0 \end{cases}$$

1- ندرس اتصال f في 1 و اشتقاق f على يمين 0 ثم على يسار1

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{\ln x}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{\ln x}}=0=f(1)$$

f غير متصلة في 1

f متصلة على يسار 1

*

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{\ln x}}}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{\frac{1}{\ln x}}}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{\frac{1}{\ln x}}}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\ln x}e^{\frac{1}{\ln x}}\times\frac{\ln x}{x-1}=0\times 1=0$$

f غير قابلة للاشتقاق على يمين 0 و C_f يقبل نصف مماس عمودي عند النقطة ذات الأفصول 0

f قابلة للاشتقاق على يسار 1 و C_f يقبل نصف مماس أفقي عند النقطة ذات الأفصول 1

2- ندرس تغيرات الدالة f

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*-\{1\}\qquad f'(x)=\left(\frac{-1}{x(\ln x)^2}\right)e^{\frac{1}{\ln x}}$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	
f	1	$\searrow$ 0	$+\infty$	$\searrow$	1

3- أ) نبين أن المستقيم $(D): y=x$ محور تماثل للمنحنى C_f

ليكن $M\left(x;e^{\frac{1}{\ln x}}\right)\in C_f$

لدينا $f\left(e^{\frac{1}{\ln x}}\right)=e^{\frac{1}{\ln\left(e^{\frac{1}{\ln x}}\right)}}=e^{\ln x}=x$ ومنه $M'\left(e^{\frac{1}{\ln x}};x\right)\in C_f$

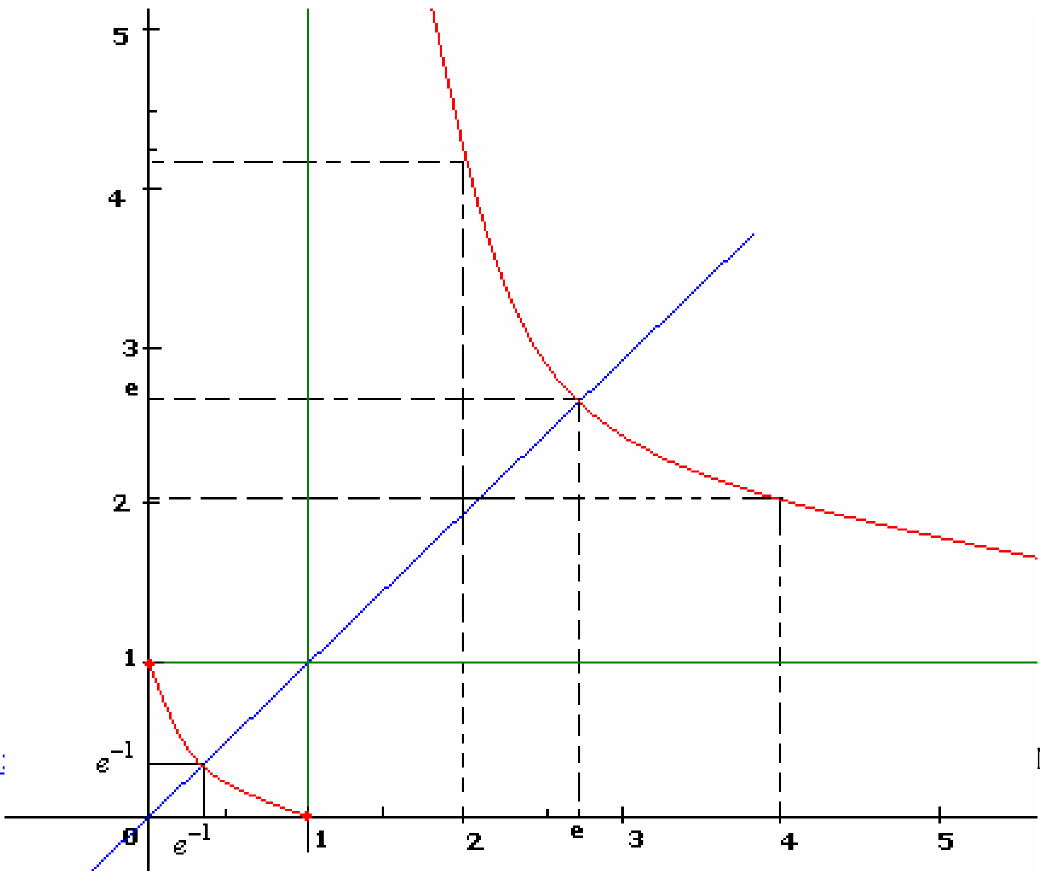
وحيث أن M و M' متماثلتان بالنسبة للمستقيم $(D): y=x$ فان المستقيم $(D): y=x$ محور تماثل
للمنحنى C_f

ب) نحدد نقطة تقاطع C_f و(D)

$$f(x)=x\Leftrightarrow e^{\frac{1}{\ln x}}=x\Leftrightarrow \frac{1}{\ln x}=\ln x\Leftrightarrow(\ln x)^2=1\Leftrightarrow x=e\quad \text{ou}\quad x=e^{-1}$$

اذن C_f و(D) يتقاطعان في النقطتين ذات الأفصولين e و e^{-1}

ج) ننشئ المنحنى C_f



(B) $\forall x \in]1;+\infty[\quad F(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,dt$

1- أ) نبين أن $\forall x]1;+\infty[\quad f(x+1) \le F(x) \le f(x)$

ليكن $x \in]1;+\infty[$

نعتبر $x \le t \le x+1$ وحيث f تناقصية على $]1;+\infty[$ فان $f(x+1) \le f(t) \le f(x)$

ومنه $\int_x^{x+1} f(x+1)\,dt \le \int_x^{x+1} f(t)\,dt \le \int_x^{x+1} f(x)\,dt$

أي $\left[tf(x+1)\right]_x^{x+1} \le \int_x^{x+1} f(t)\,dt \le \left[tf(x)\right]_x^{x+1}$

اذن $\forall x]1;+\infty[\quad f(x+1) \le F(x) \le f(x)$

ب) نستنتج $\lim_{x\to+\infty} F(x)$

لدينا $\forall x]1;+\infty[\quad f(x+1) \le F(x) \le f(x)$

و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x+1) = 1$ ومنه $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

2- أ) نبين أن $\forall u \in]0;+\infty[\quad e^u \ge u+1$

$\forall t \in]0;+\infty[\quad e^t \ge 1$ ومنه $\forall u \in]0;+\infty[\quad \int_0^u e^t\,dt \ge [t]_0^1$

أي $\forall u \in]0;+\infty[\quad \left[e^t\right]_0^u \ge [t]_0^u$ إذن $\forall u \in]0;+\infty[\quad e^u \ge u+1$

ب) نستنتج أنه $\forall x \in]1;+\infty[\quad F(x) - 1 \ge \int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t}\,dt$

$\forall t \in]1;+\infty[\quad e^{\frac{1}{\ln t}} \ge \frac{1}{\ln t} + 1$ ومنه $\forall x \in]1;+\infty[\quad \int_x^{x+1} e^{\frac{1}{\ln t}}\,dt \ge \int_x^{x+1} (\frac{1}{\ln t} + 1)\,dt$

و بالتالي $\forall x \in]1;+\infty[\quad F(x) \ge [t]_x^{x+1} + \int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t}\,dt$

إذن $\forall x \in]1;+\infty[\quad F(x) - 1 \ge \int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t}\,dt$

ج) بين أن $\forall t \in]1;+\infty[\quad \ln t \le t-1$

$\forall u \in]1;+\infty[\quad \frac{1}{u} \le 1$ ومنه $\forall t \in]1;+\infty[\quad \int_1^t \frac{1}{u}\,du \le \int_1^t du$

إذن $\forall t \in]1;+\infty[\quad \ln t \le t-1$

د) نستنتج أن $\forall x \in]1;+\infty[\quad \int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t}\,dt \ge \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

$\forall t \in]1;+\infty[\quad \ln t \leq t-1$ ومنه $\forall t \in]1;+\infty[\quad \dfrac{1}{\ln t} \geq \dfrac{1}{t-1}$

ومنه $\forall x \in]1;+\infty[\quad \int_x^{x+1} \dfrac{1}{\ln t} dt \geq \int_x^{x+1} \dfrac{1}{t-1} dt$

$\forall x \in]1;+\infty[\quad \int_x^{x+1} \dfrac{1}{\ln t} dt \geq \left[\ln(t-1) \right]_x^{x+1}$

إذن $\forall x \in]1;+\infty[\quad \int_x^{x+1} \dfrac{1}{\ln t} dt \geq \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

ه) نحدد $\lim\limits_{x \to 1^+} F(x)$

لدينا $\int_x^{x+1} \dfrac{1}{\ln t} dt \geq \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) \quad ; \quad \forall x \in]1;+\infty[\quad F(x) - 1 \geq \int_x^{x+1} \dfrac{1}{\ln t} dt$

ومنه $\forall x \in]1;+\infty[\quad F(x) - 1 \geq \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

وحيث أن $\lim\limits_{x \to 1^+} \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = +\infty$ فان $\lim\limits_{x \to 1^+} F(x) = +\infty$

3- ندرس تغيرات F

لدينا $\forall x \in]1;+\infty[\quad F(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt$

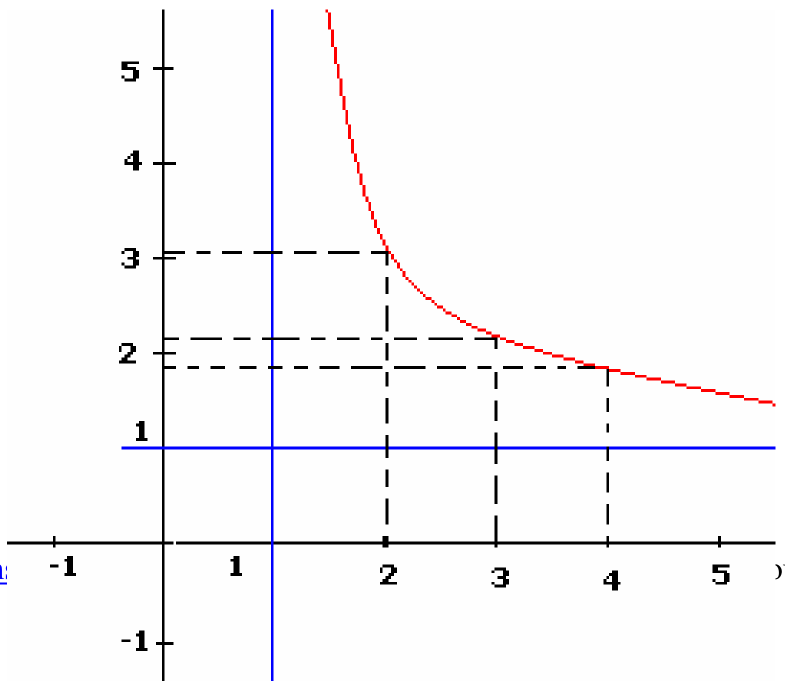
ومنه $\forall x \in]1;+\infty[\quad F'(x) = f(x+1) - f(x)$

وحيث f تناقصية ومنه $\forall x \in]1;+\infty[\quad F'(x) \leq 0$

اذن F تناقصية

x	1	$+\infty$
F	$+\infty$ ↘	1

4- ننشئ منحنى الدالة F في المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$



تمارين

1- حدد a ; b ; c حيث $\forall x \in \mathbb{R}-\{-1;3\} \quad \frac{-3x^2+7x+2}{x^2-2x-3}=a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-3}$

أحسب $\int_0^2 \frac{-3x^2+7x+2}{x^2-2x-3}dx$

2- أحسب $\int_0^1 \frac{x^4+x^2+3}{x^2+1}dx$; $\int_{-1}^0 \frac{1}{4x^2+4x+2}dx \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx$

3- بين أن $\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

أحسب $\int_0^x \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}dt$

تمرين2

1- باستعمال المكاملة بالأجزاء أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$; $\int_0^1 x^2 \ln(x^2+1)dx \quad \int_0^{\ln 2}(x+2)e^{2x}dx$

و $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx$

2- حدد الدالة الأصلية لـ $x \to \sin^3 x$ التي تنعدم في0 على $\mathbb{R}$ ثم أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^3 dx$

تمرين3

نعتبر $I_n=\int_0^1 x^n e^x dx$

1- أحسب I_1

2- بين $I_{n+1}=e-(n+1)I_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ باستعمال المكاملة بالأجزاء.

3- أحسب $I_2 \quad I_3$

4- أستنتج $\int_0^1 (x^3+2x^2-2x)e^x dx$

تمرين4

1- بين أن $1-x \le \frac{1}{1+x} \le 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

2- استنتج $x-\frac{x^2}{2}\le \ln(1+x)\le x \quad \forall x\in\mathbb{R}^+$

3- استنتج تأطيرا لـ $\int_0^1 \ln(1+x^2)dx$ إلى 0,1.

تمرين5

1- أحسب التكاملات التالية بتغيير المتغير في الحالات التالية

$$\int_0^{\ln 2}\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}dx \quad (e^{-x}=t) \quad ; \quad \int_0^1\frac{x\sqrt{x}}{1+x}dx \quad (\sqrt{x}=t)$$

$$\int_2^5\frac{dx}{x+\sqrt{x-1}} \quad (t=\sqrt{x-1}) \quad ; \quad \int_0^1\sqrt[3]{x+1} \quad (t=\sqrt[3]{x+1})$$

$$\int_1^2(\ln x)^2dx \quad (t=\ln x) \quad ; \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^4 x}dx \quad (t=\tan x)$$

2- حدد كتابة الشكل القانوني لـ $-x^2+3x-2$

ثم أحسب $\int_1^2\sqrt{-x^2+3x-2}dx \quad \left(x-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\sin t\right)$

تمرين6

أحسب $\int_0^1\frac{x^2-x+1}{1+x^2}dx \qquad \int_0^1\frac{1}{1+e^x}dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x\sin 2x}{1+\tan^2 x}dx \qquad \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}}\frac{x+2}{x(x^2+2)}dx \qquad \int_0^1\left(x\ln(x+1)+\frac{1}{x^2+2x+2}\right)dx$$

تمرين7

1- أ- أحسب $\int_1^{-1}\frac{t^2-1}{2-t}dt$

ب- أحسب $J=\int_0^{\pi}\frac{\sin^3 x}{2-\cos x}dx$ نضع $t=\cos x$

2- أ- بين أن $\frac{1}{x(x+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2} \quad \forall x\in\mathbb{R}^*-\{-1\}$ و أحسب $\int_1^2\frac{1}{x(x+1)^2}dx$

ب- أحسب $\int_1^2\frac{\ln x}{(1+x)^3}dx$

تمرين8

1- تحقق أن $\frac{x^2-3x}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x-1)^2} \quad \forall x\in\mathbb{R}^*-\{-1;1\}$

2- أحسب $\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{3e^x-1}{(1+e^x)(1-e^x)^2}dx$ نضع $e^x=\frac{1}{t}$

تمرين9

1- أحسب $\int_0^1\frac{dx}{2(x+1)\sqrt{x}}$ نضع $t=\sqrt{x}$

2- أ- تحقق أن $\frac{2}{x(x^2+1)}=\frac{2}{x}-\frac{2x}{x^2+1} \quad \forall x\in\mathbb{R}^*$

ب- نعتبر $k \in [0;1]$. باستعمال المكاملة بالأجزاء أحسب $A_k = \int_k^1 \frac{2x \ln x}{\left(x^2+1\right)^2} dx$

حدد $\lim\limits_{x \to 0} A_k$

تمرين10

1- أ- تأكد أن $\frac{t^2-t+1}{t\left(t^2+1\right)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2+1}$

ب- أحسب $\int_0^{\frac{1}{2}\ln 3} \frac{e^{2x}-e^x+1}{1+e^{2x}} dx$ نضع $t = e^x$

2- أحسب $\int_0^1 \left(3x^2+2x+1\right)\ln(x+1)dx$ باستعمال المكاملة بالأجزاء

تمرين11

1- تأكد أن $\frac{1}{x\left(x^2+1\right)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}^*$

2- أحسب $I(\alpha) = \int_\alpha^1 \frac{x \ln x}{\left(x^2+1\right)^2} dx$ باستعمال المكاملة بالأجزاء حيث $\alpha \in]0;1[$

3- أ- أحسب $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} I(\alpha)$

تمرين12

نعتبر $n \in \mathbb{N}^*$ و $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n}{\cos x} dx \quad ; I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx$

1- أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^n \cos x dx$ و استنتج $I_{n+2} - I_n$ بدلالة n.

1- أحسب I_1 و استنتج $I_3 \quad ; \quad I_5$

2- أ- بين أن الدالة $x \to \ln\left[tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$ دالة أصلية للدالة $x \to \frac{1}{\cos x}$ على $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$

ب- استنتج I_0 ثم $I_2 \quad ; \quad I_4$

تمرين13

نعتبر المتتالية العددية (I_n) المعرفة بما يلي $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

1- أحسب I_{n+2} بدلالة I_n

2- أحسب I_{2n} بدلالة n . حيث $n \in \mathbb{N}^*$

3- بين أن (I_n) تناقصية

4- أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$

5- أحسب $(n+1)I_{n+1} \times I_n$

6- بين أن $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n \times \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$

تمرين14

لكل عدد صحيح طبيعي n نرمز لـ f_n التطبيق المعرف من $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ نحو $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f_n(0)=2(n+1) \quad ; \quad \forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right] \quad f_n(x)=\frac{\sin(2(n+1)x)}{\sin x}$$

1- أ- بين أن f_n متصلة $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ و استنتج أن المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx$$

ب- بين أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1}-u_n=2\times\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$

ج- أحسب u_0 و u_1 و u_2 و u_3

2- أ- بين أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n=2\sum_{k=0}^{n}\frac{(1)^k}{2k+1}$

ب- أحسب $\int_0^1 dx \; ; \; \int_0^1 x^{2k}dx$ حيث $k\in\mathbb{N}^*$ و استنتج

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n=2\int_0^1\frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}dx$$

ج- أثبت أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad \left|u_n-2\int_0^1\frac{1}{x^2+1}\right|\le\frac{2}{2n+3}$

د- أدرس تقارب المتتالية (u_n)

تمرين15

نعتبر $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n=\int_0^1\frac{e^{nx}}{1+e^x}dx$

1- بين أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad \forall x\in[0;1] \quad \frac{e^{nx}}{1+e}\le\frac{e^{nx}}{1+e^x}\le\frac{e^{nx}}{2}$

2- استنتج تأطيرا للعدد u_n ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{e^n}$

تمرين16

أحسب النهايات

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\frac{k\pi}{n} \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n^2+k^2}$$

تمرين17

ليكن $\alpha\in]0;+\infty[$

1 - بين أن لكل عدد صحيح طبيعي $n\ge 2$

$$\int_n^{n+1}\frac{1}{x^\alpha}dx\le\frac{1}{n^\alpha}\le\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x^\alpha}dx$$

2- نضع $S_{(n;\alpha)} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + ... + \frac{1}{n^\alpha}$

أ- بين أن المتتالية $\left(S_{(n;\alpha)}\right)_{n\geq 2}$

ب- بين أن $\int_1^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}dx \leq S_{(n;\alpha)} \leq 1 + \int_1^{n} \frac{1}{x^\alpha}dx$

3- استنتج أن من أجل $\alpha \succ 1$ ، المتتالية $\left(S_{(n;\alpha)}\right)_{n\geq 2}$ متقاربة.

و من أجل $0 \prec \alpha \leq 1$. المتتالية $\left(S_{(n;\alpha)}\right)_{n\geq 2}$ متباعدة و أن $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{(n;\alpha)}$

تمرين18

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي $u_n = \left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

نضع لكل n من $\mathbb{N}^*$ $\quad v_n = \ln(u_n)$

1- بين أن $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

2- استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4e^{-1}$