الثـــــانية علوم رياضية	المتتـــاليـــات الـــعـــددـــيـــة	حمـــيد بوعيـــون

تمرين 1

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in IN}$ المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n-3}{4-u_n} \end{cases}$

1)بين : أن $(\forall n\in IN):-1\le u_n\le 3$

2) ادرس رتابة المتتالية (u_n)

3) استنتج أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$.

4) نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in IN}$ المعرفة بما يلي $v_n=\dfrac{u_n-3}{u_n+1}$.

a) بين أن المتتالية (v_n) هندسية حدد أساسها وحدها الأول.

b) احسب (v_n) ثم (u_n) بدلالة n واستنتج $\lim u_n$ و $\lim v_n$.

c) أحسب $S_n=v_0+v_1+............+v_n$ و $\lim S_n$.

d) أحسب $P_n=v_0.v_1..............v_n$

تمرين 2

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in IN}$ المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\dfrac{3}{\sqrt{6-u_n^2}} \end{cases}$

1)بين : أن $(\forall n\in IN):\ 0\le u_n<\sqrt{3}$

2) ادرس رتابة المتتالية (u_n)

3) نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in IN}$ المعرفة بما يلي $v_n=\dfrac{u_n^2}{3-u_n^2}$.

a) بين أن المتتالية (v_n) حسابية حدد أساسها وحدها الأول.

b) احسب (v_n) ثم (u_n) بدلالة n واستنتج $\lim u_n$.

تمرين 3

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in IN}$ المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}u_n^3+2} \end{cases}$ ونعتبر المتتالية $v_n=u_n^3-3$

1)بين : أن $(\forall n\in IN):u_n\ge\sqrt[3]{3}$ 2) ادرس رتابة المتتالية (u_n)

3) استنتج أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$.

4) a) بين أن المتتالية (v_n) هندسية b) احسب (v_n) ثم (u_n) بدلالة n

c) أحسب $S_n=v_0+v_1+............+v_n$ و $\lim S_n$.

d) أحسب $P_n=v_0.v_1..............v_n$

تمرين 4

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in IN}$ المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_0=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ u_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1-u_n}{2}} \end{cases}$

1)بين : أن $(\forall n\in IN):\ 0<u_n<1$

3) نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in IN}$ المعرفة بما يلي $v_n=\dfrac{\pi}{3}-\arccos(u_n)$

a) بين أن $(\forall x\in[0,1]):\arccos\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}\arccos(x)$

b) بين أن المتتالية (v_n) هندسية وحدد أساسها وحدها الأول.

c) احسب (v_n) ثم (u_n) بدلالة n.

تمرين 5

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in IN}$ المعرفة بما يلي $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 4(u_{n+1} - u_n) \end{cases}$ ونضع $v_n = \dfrac{u_n}{2^n}$

1) بين أن المتتالية (v_n) حسابية وحدد أساسها وحدها الأول .

2) احسب v_n ثم u_n بدلالة n واستنتج $\lim u_n$.

تمرين 6

ليكن $\alpha \in]0,\pi[$

نعتبر المتتالية $(P_n)_{n\in IN}$ المعرفة بما يلي: $P_n = \sin(\dfrac{\alpha}{2^n}) \prod_{k=1}^{n} cos(\dfrac{\alpha}{2^k})$

1) بين أن المتتالية (P_n) هندسية حدد أساسها وحدها الأول.

2) استنتج $\prod_{k=1}^{n} cos(\dfrac{\alpha}{2^k})$ بدلالة n ,

تمرين 7

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in IN}$ المعرفة بما يلي: $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \dfrac{u_n^3 + 2}{u_n^2 + 1}$

1) بين أن $(\forall n \in IN);0 < u_n < 2$. 2) ادرس رتابة المتتالية (u_n) .

3) استنتج أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$.

4) a) بين أن $(\forall n \in IN):\ 2 - u_{n+1} \le \dfrac{4}{5}(2 - u_n)$.

b) استنتج بطريقة أخرى أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$

5)نضع $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$. بين أن : $(\forall n \in IN):\ S_n \ge 2n - 3 + 5(\dfrac{4}{5})^{n+1}$ واحسب $\lim S_n$

تمرين 8

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in IN}$ المعرفة بما يلي : $u_0 = -\dfrac{1}{3}$ و $u_{n+1} = 1 - \sqrt[3]{5 - 3u_n}$

1) بين أن $(\forall n \in IN) : -1 < u_n < 0$.

2) ادرس رتابة المتتالية (u_n) .

3) a) استنتج أن : $(\forall n \in IN) : 0 < u_n + 1 < (\dfrac{3}{4})^n . \dfrac{2}{3}$.

b) استنتج أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$.

تمرين 9

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = \dfrac{6x}{x^3 + 4}$

1)حدد مجموعة تعريف الدالة f.

2)بين أن f تقابل من $\left[0,\sqrt[3]{2}\right]$ نحو مجال يجب تحديده.

3) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in IN}$ المعرفة بـما يلي : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a) بين أن : $(\forall n \in IN) : 1 \le u_n < \sqrt[3]{2}$.

b) بين أن (u_n) تزايدية واستنتج أنها مقاربة واحسب $\lim u_n$.

تمرين 10

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in IN}$ المعرفة بما يلي: $u_1 = \alpha \in IR$ و $u_{n+1} = \dfrac{2(n^2 + n + 1) + nu_n}{(n+1)^2}$

1) بين أن (u_n) رتيبة ومحدودة واحسب نهايتها l .

2) أحسب $u_{n+1} - l$ بدلالة $u_n - l$ واستنتج u_n بدلالة n و α .

تمرين 11

1) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$

بين أن المتتالية (u_n) متقاربة واحسب نهايتها .

2) نفس السؤال بالنسبة لـ $(v_n)_{n\in IN}$ بحيث $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k+1}}$

تمرين 12

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

1) بين أن $\lim u_n = +\infty$

2) بين أن $(\forall k \geq 1): 2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{k} - 2\sqrt{k-1}$ واستنتج $E(u_{10^6})$.

تمرين 13

1) بين أنه إذا كانت (u_n) متتالية تزايدية وغير مكبورة فإن $\lim u_n = +\infty$

2) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

a) بين أن $(\forall n \geq 1): u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$

b) واستنتج أن $\lim u_n = +\infty$

c) بين أن $u_{1024} \geq 6$ واستنتج عدد طبيعي n بحيث $u_n \geq 1000$

تمرين 14

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^k}$

1) بين أن المتتالية (u_n) متقاربة لتكن l نهايتها .

2) بين أن $0 \leq l - u_N \leq \frac{1}{N(N+1)^N}$ لكل N من IN^*

3) استنتج قيمة مقربة للعدد l بالدقة 10^{-4}

تمرين 15

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_o = 0$ و $(\forall n \in IN) : u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2^n}$

1) بين أن $(\forall n \in IN): 0 \leq u_n \leq 1$ واستنتج أن $(\forall n \in IN): u_n \leq \frac{1}{2^{n-2}}$

2) بين أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$

3) بين أن $(\forall n \geq 2): u_n > \frac{1}{2^n - 1}$ استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ تناقصية قطعا .

تمرين 16

لتكن $(a_n)_{n\geq 0}$ متتالية عددية نضع $b_n = \frac{a_0 + 2a_1 + 4a_2 + \cdots + 2^n a_n}{2^{n+1}}$

بين ما يلي :

1) إذا كانت (a_n) تزايدية وموجبة فإن (b_n) تزايدية .

2) إذا كانت (a_n) مكبورة ب $M \geq 0$ فإن (b_n) مكبورة ب M

3) إذا كانت (a_n) تؤول إلى 0 فإن (b_n) تؤول إلى 0 .

4) إذا كانت (a_n) تؤول إلى l فإن (b_n) تؤول إلى l .

تمرين 17

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_o \geq 2$ و $(\forall n \in IN) \ : u_{n+1} = u_n^2 - \frac{2n}{n+1}$

1) بين أن $(\forall n \geq 1): u_n \geq 4$ واستنتج أن (u_n) غير متقاربة .

2) a) $(\forall n \geq 0): u_{n+1} - u_n \geq (u_n + 1)(u_n - 2)$

b) استنتج أن (u_n) تزايدية .

3) هل المتتالية (u_n) مكبورة ؟

تمرين 18

1) بين أن لكل $n \geq 1$ المعادلة $x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - \frac{n+1}{n} = 0$ تقبل حلا وحيدا في IR^+ وأن $u_n \in \left]0,1\right[$.

2) بين أن المتتالية (u_n) تناصية .

3) بين أن المتتالية (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$.

تمرين 19

نعتبر الدالة : $f(x) = 2x^3 + x - 1$

1) ادرس تغيرات f . واستنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $0 < \alpha < 1$.

2) نعتبر المتتاليتين (v_n) , (u_n) المعرفتين بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \quad et \quad v_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n \quad et \ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad si \quad f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) > 0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad et \ v_{n+1} = v_n \quad si \quad f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

a) أحسب $u_2 , v_2 , u_1 \ , v_1$.

b) بين أن $0 \leq u_n \leq 1$ و $0 \leq v_n \leq 1$ لكل n من IN .

c) بين أن (u_n) مكبورة بالعدد α و (v_n) مصغورة بالعدد α

d) بين أن (u_n) , (v_n) متحاديتان وحدد نهايتهما .

تمرين 20

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{1}{4x^2 + 4}$.

ونعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in IN}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1) a) ادرس تغيرات f على IR^+ .

b) بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$

c) بين أن $(\forall (x,y) \in [0,1]^2) : \left| f(x) - f(y) \right| \leq \frac{1}{2}\left| x - y \right|$.

2) بين أن $(\forall n \in IN) : 0 < u_n \leq \frac{1}{2}$.

3) a) بين أن $(\forall n \in IN) : \left| u_{n+1} - \alpha \right| \leq \frac{1}{2}\left| u_n - \alpha \right|$

b) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \in IN}$ متقاربة واحسب نهايتها .

4) نضع $v_n = u_{2n}$ و $w_n = u_{2n+1}$

a) بين أن $(\forall n \in IN) \ \ w_n < \alpha < v_n$

b) أدرس رتابة (v_n) و (w_n)

3) a) بين أن : $(\forall n\in IN): v_{n+1}-w_{n+1}\leq\frac{1}{4}(v_n-w_n)$.

b) بين أن (v_n) و (w_n) متحاديتان وحدد نهايتهما المشتركة .

تمرين 21

نعتبر المتتاليتين u_n , v_n المعرفتين بما يلي :

$$\begin{cases} u_1=1 \quad et \quad v_1=6 \\ u_{n+1}=\frac{5u_n+v_n}{6} \quad et \quad v_{n+1}=\frac{u_n+(\alpha-1)v_n}{\alpha} \quad (\alpha>\frac{6}{5}) \end{cases}$$

1) بين أن $u_n<v_n$ $(\forall n\in IN^*)$ وأن (u_n) تزايدية و (v_n) تناقصية .

2) بين أن $(\forall n\in IN^*): 0<v_{n+1}-u_{n+1}<\frac{5}{6}(v_n-u_n)$ واستنتج أن (u_n) و (v_n) تحاديتان .

3) بين أن $6\alpha u_{n+2}-(11\alpha-6)u_{n+1}+(5\alpha-6)u_n=0$ واستنتج u_n ثم v_n بدلالة α و n .

تمرين 22

نعتبر المتتاليتين (u_n) , (v_n) المعرفتين بما يلي :
$$\begin{cases} u_0=a \quad v_0=b \\ u_{n+1}=\sqrt{u_nv_n} \quad v_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2} \end{cases}$$

1) بين أن (u_n) ; (v_n) متحاديتان .

2) بين أن $(\forall n\in IN); 0\leq v_{n+1}-u_{n+1}\leq\frac{1}{8a}(v_n-u_n)^2$

3) استنتج تأطير كل من العددين $l-u_n$ و $l-v_n$ حيث $l=\lim u_n=\lim v_n$.

تمرين 23

لكل n من IN^* نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بمايلي : $f_n(x)=3x^n-x-1$

1) a) بين أن f_n تزايدية على $\left[\sqrt[n-1]{\frac{1}{3n}},+\infty\right[$ وتناقصية على $\left[0,\sqrt[n-1]{\frac{1}{3n}}\right]$.

b) ضع جدول تغيرات f_n واستنتج إشارتها .

2) بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا u_n في المجال $[0,+\infty[$.

3) أحسب $f_n(1)$ واستنتج أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*): 0<u_n<1$

4) a) بين أن : $(\forall x\in]0,1[): f_{n+1}(x)<f_n(x)$

b) استنتج أن المتتالية (u_n) تزايدية .

c) بين أن المتتالية (u_n) متقابة .

5) نضع $\lim u_n=l$.

a) بين $0\leq l\leq 1$.

b) بين : $(\forall n\in\mathbb{N}^*): u_n\leq l$.

c) بين أن $l=1$

تمرين 24

نعتبر الدالة f المعرفة على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ بمل يلي : $f(x)=x+\cos(x)$

1) أدرس تغيرات الدالة f واستنتج أن $f\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)\subset\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

2) نعتر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = \alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : \ 0 \leq u_n \leq \dfrac{\pi}{2}$

b) بين أن المتتالية (u_n) تزايدية .

c) استنتج أن (u_n) متقاربة وأحسب نهايتها .

3) نعتر المتتالية (v_n) المعرفة بما يلي : $v_n = \dfrac{\pi}{2} - u_n$

a) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : \ 0 \leq v_n \leq \dfrac{\pi}{2}$

b) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_{n+1} = v_n - \sin(v_n)$

4) نقيل أن : $(\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]) : 0 \leq x - \sin(x) \leq \dfrac{x^3}{6}$

a) بين $(\forall n \in \mathbb{N}) : \ 0 \leq v_{n+1} \leq \dfrac{1}{6} v_n^3$

b) استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : \ 0 \leq v_n \leq \left(\dfrac{1}{6}\right)^{\frac{3^n - 1}{2}} v_0^{(3^n)}$

c) نفترض أن $\alpha = 1{,}57$

إذا علمنا أن $3{,}14$ قيمة مقربة بتفريط للعدد π بالدقة 2.10^{-3} ، بين أن u_2 قيمة مقربة بتفريط للعدد $\dfrac{\pi}{2}$ بالدقة 10^{-30} .