تمارين حول الاشـــــــتقاق

الثانية سلك بكالوريا علوم رياضية

تمرين 1

A - أحسب الدالة المشتقة f' للدالة f بعد تحديد D_f و $D_{f'}$ في كل حالة من الحالات التالية :

-1 $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x+1)^2}$ -2 $f(x)=\dfrac{\sin x}{2\cos x-1}$

-3 $f(x)=\cos\left(x^3-6x\right)$ -4 $f(x)=x\sqrt{x^2-4}$

-5 $f(x)=\sqrt[3]{(2x+1)^2}$ -6 $f(x)=\sqrt[3]{2x+1}^2$

-7 $\begin{cases} f(x)=\tan x & x\geq 0 \\ f(x)=\arctan x & x<0 \end{cases}$

B- أحسب $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan\dfrac{x}{x^2+1}}{x}$

تمرين 2

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1;+\infty[$ بـ $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$

-1 حدد تقريبا للدالة f بدالة تالفية بجوار 0

-2 أعط قيمة مقربة لكل من $\sqrt[3]{1,003}$ و $\sqrt[3]{0,998}$

تمرين 3 حدد مجموعة الدوال الأصلية ومجالات تعريفها لكل دالة من الدوال التالية

-1 $f(x)=3x^2+\dfrac{1}{x^2}-5$ -2 $f(x)=\dfrac{2x+2}{(x+1)^3}$

-3 $f(x)=\sqrt[3]{x-2}$ -4 $f(x)=\left(x^2-2x\right)\sqrt{x}$

-5 $f(x)=x\cos\left(x^2+3\right)$ -6 $f(x)=(\cos x)^3$

-7 $f(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x+1}}$ -8 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+5}$

-9 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{-2x^2+6x+8}}$

تمرين 4

لتكن f دالة عددية معرفة ب $\begin{cases} f(x)=-x^2+2 & x\geq 1 \\ f(x)=3x-2 & x<1 \end{cases}$

-1 بين أن f تقبل دالة أصلية على $[0;2]$

-2 حدد مجموعة الدوال الأصلية لـ f على $[0;2]$

تمرين 5

لتكن f دالة عددية معرفة بـ $\begin{cases} f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

بين أن f قابلة للاشتقاق في 0 و أن نهاية f' عند 0 غير موجودة

تمرين 6

لتكن f و F دالتين عدديتين معرفتين بـ

$\begin{cases} f(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ $\begin{cases} F(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ F(0)=0 \end{cases}$

-1 بين أن f غير متصلة في 0

-2 بين أن F دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}$

تمرين 7

نعتبر f دالة معرفة بـ $f(x)=\arctan x+\arctan\dfrac{1-x}{1+x}$

بين أن f ثابتة على مجالات و حدد في كل مجال من هذه المجالات قيمة $f(x)$

تمرين 8 نعتبر f دالة عددية لمتغير حقيقي حيث

$f(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)$

بين أن المعادلة $f'(x)=0$ تقبل ثلاث حلول مختلفة في $\mathbb{R}$

تمرين 11

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في النقطة a

أحسب $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(a+h^2\right)-f(a+h)}{h}$

تمرين 12

نعتبر أن الدالة العددية f قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ و تحقق:

أ- $\forall x\in]0;1[\quad f(x)\succ 0$

ب- $f(0)=0$

أثبت أنه $\exists c\in]0;1[\quad 2\dfrac{f'(c)}{f(c)}=3\dfrac{f'(1-c)}{f(1-c)}$

تمرين 13 نعتبر أن الدالة العددية f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ بحيث $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=l$

بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=l$

تمرين 14

نعتبر f دالة عددية لمتغير حقيقي حيث $f(x)=\arctan x$

بين أن $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad f'(x)=\dfrac{\sin\left(\arctan\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+x^2}}$

بين بالترجع أن $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{\left(1+x^2\right)^{\frac{n}{2}}}\times\sin\left(n\cdot\arctan\frac{1}{x}\right)$$

تمرين 15

نعتبر أن الدالة العددية f متصلة على $[0;1]$ قابلة للاشتقاق على $]0;1[$ بحيث $f(1)=1$ و $f(0)=0$

بين أن $\exists c\in]0;1[\quad 2cf'(c)=\sqrt{c}$

تمارين حول الاشـــــتقاق

الثانية سلك بكالوريا علوم رياضية

تمرين15

لتكن f دالة عددية معرفة على $[0;1]$ بما يلي

$$f(x)=\frac{1}{4}\tan\frac{1}{x+1}$$

1- بين أن f قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ و أن

$$\forall x\in[0;1]\quad |f'(x)|\le\frac{1}{4\cos^2 1}$$

2- بين أن $f([0;1])\subset[0;1]$

3- أ- بين أنه : $\exists!\alpha\in]0;1[\quad f(\alpha)=\alpha$

ب- استنتج أن

$$\forall x\in]0;1[-\{\alpha\}\qquad |f(x)-\alpha|\le\frac{1}{4\cos^2 1}|x-\alpha|$$

4- نعتبر المتتالية العددية المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0\in]0;1[-\{\alpha\} \\ u_{n+1}=\frac{1}{4}\tan\left(\frac{1}{u_n+1}\right)\end{cases}$$

أ- بين أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad |u_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{4\cos^2 1}\right)^n|u_0-\alpha|$

ب- استنتج أن (u_n) متقاربة و حدد نهايتها.

تمرين 16

I- لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بـ

$$\begin{cases} f(x)=x+2-\sqrt{x^2+2x} & x\prec -2 \\ f(x)=\arctan\sqrt{x+2} & x\ge -2\end{cases}$$

1- أدرس اشتقاق f عند -2

2- حدد الدالة المشتقة للدالة f

- ليكن g قصور f على $[0;2]$ و (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=g(u_n) & \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$

II أ) بين أن $\forall x\in\mathbb{R}^+\quad \arctan x\le x$

ب) بين أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad 0\le u_n\le 2$

ج) بين أن (u_n) متقاربة

2- أ) بين أن المعادلة $g(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α من $]0;2[$

ب) أثبت أن $\forall x\in]0;2[\quad g'(x)\le\frac{1}{6\sqrt{2}}$

ج) بين أن $\forall n\in\mathbb{N}\ |u_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{6\sqrt{2}}|u_n-\alpha|$ استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

تمرين17

لتكن f متصلة على $[a;b]$ بحيث $f(a)=f(b)=0$ و $f'(a)=0$

بين أنه $\exists c\in\mathbb{N}\quad f'(c)=\frac{f(c)}{c-a}$

تمرين18 (مبرهنة LAGRANGE)

لتكن f و g متصلتين على $[a;b]$ و قابلتين للاشتقاق على $]a;b[$ بحيث $g'(x)\ne 0\quad \forall x\in]a;b[$

1- بين أن $g(a)\ne g(b)$

2- نعتبر الدالة ψ المعرفة على $[a;b]$ بـ:

$$\psi(x)=f(x)-f(a)-k\big(g(x)-g(a)\big)$$

أ) حدد k لكي تكون $\psi(b)=0$

ب) استنتج أن $\exists c\in]a;b[\quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$

تمرين19

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ بحيث $f(0)=0$ و $f'(x)\ne 0\quad \forall x\in[0;1]$

بين أن f لها إشارة ثابتة على $[0;1]$

تمرين20

لتكن f متصلة على $[a;b]$ و قابلة للاشتقاق على $]a;b[$

ليكن $x_0\in]a;b[$ و $k\in\mathbb{R}_+^*$ بحيث $[x_0;x_0+h]\subset[a;b]$

1- بين أنه: $\exists\theta\in]0;1[\quad f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0+\theta h)$

2- تطبيق نعتبر $f(x)=\frac{1}{x+1}$

حدد θ بدلالة h ثم أحسب $\lim\limits_{h\to 0}\theta$

تمرين21

نعتبر الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=\frac{2x-1}{2(x^2+1)}+\arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

1- أدرس اتصال و اشتقاق f على D_f

2- بين أن $f^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)}{(x^2+1)^n}\quad \forall x\in D_f$ حيث

P_n حدودية يتم تحديد درجتها

($f^{(n)}$ المشتقة لـ f من الرتبة n)

3- بين أن جذور P_n كلها أعداد حقيقة و مختلفة مثنى مثنى

تمارين حول دراسة الدوال- د1-

الثانية سلك بكالوريا علوم رياضية

تمرين 1

أدرس f و أنشئ منحناها في الحالتين التاليتين

أ- $f(x)=\sqrt[3]{x^3+1}$ ب- $\begin{cases} f(x)=(2-x)^{\frac{3}{2}} & x \prec 2 \\ f(x)=-\arctan\sqrt{x-2} & x \geq 2 \end{cases}$

تمرين 2

لتكن f دالة عددية معرفة بـ

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{2-x} & x \in [0;1] \\ f(x)=x-\sqrt{x^2-x} & x \in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[\end{cases}$$

1- أدرس اتصال f في 0 و 1 وحدد نهاية f عند $-\infty$ و $+\infty$

2- ادرس قابلية اشتقاق f في كل من 0 و1 و أول النتيجتين هندسيا.

3- أحسب $f'(x)$ لكل $x \in \mathbb{R}^*-\{1\}$ و ادرس إشارتها و أعط جدول تغيرات f.

4 - أدرس الفروع اللانهائية لـ C_f ثم أنشئ C_f $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$

تمرين3

لتكن f دالة عددية معرفة بـ

$$\begin{cases} f(x)=x-2\arctan(x) & x \geq 0 \\ f(x)=\dfrac{x}{x-1} & x \prec 0 \end{cases}$$

1- احسب نهاية f عند $-\infty$, $+\infty$

2- بين أن f قابلة للاشتقاق في 0 و أعط معادلة المماس لـ C_f عند النقطة ذات الافصول 0.

3- احسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^*$ ثم ادرس تغيرات f.

4- ادرس الفروع اللانهائية لـ C_f ثم أنشئ C_f

5- ليكن g قصور لـ f على $I=]-\infty;0[$

بين أن g تقابل من I نحو مجال J يجيب تحديده ثم حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J

تمرين4

نعتبر الدالة f المعرفة على $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ بـ $f(x)=\sqrt{2x+1}-\dfrac{x}{\sqrt{2x+1}}$

1- أ- حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} f(x)$ و أول النتائج هـــــــــــندسيا .

ب- حدد $f'(x)$ لكل x من $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ و أعط جدول تغيرات f

2- أ- بين أن $f''(x)=(2x+1)^{\frac{-5}{2}}(1-x)$ $\forall x \in \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

ب- بين أن النقطة A ذات الافصول 1 نقطة انعطـاف لـ (C_f)

4- أنشئ (C_f) $\left(\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm\right)$

5- ليكن g تقابل من $[0;+\infty[$ نحو مجال J يجيب تحديده ثم حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J

تمرين5

نعتبر الدالة f المعرفة على $D=]-\infty;-1]\cup]0;+\infty[$ بـما يلي $f(x)=\frac{1}{x}\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}$

1- أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

2- أ- تحقــق من أن $\frac{f(x)}{x+1}=\frac{x^2-x+1}{x^2\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}}$ $\forall x\in D-\{-1\}$

ب- أدرس قابلية اشتقاق f على اليسار في1- ثم أعــط تأويلا هـــندسيا للنتيجة.

3- بين أن $f'(x)=\frac{-3}{2x^3\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}}$ $\forall x\in D-\{-1\}$ و أعط جدول تغــيرات الدالة f

4- حدد الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) ثم أنشئ (C_f)

5- أ- لتكن g قصور الدالة f على $]-\infty;-1]$ نحو مجال I ينبغي تحديـده.

ب – حـــــدد $g^{-1}(x)$ لكـــــل x من I

تمرين6

نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$

1- أحســــــــب $f(1)$ وحـــدد D_f

2- أ- أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين في 2- ثم أول النتـــيجة هندســـيا.

ب- أدرس قابلية اشتقاق f في 1 ثم أول النتيجة هندســـــيا.

3- أحسب $f'(x)$ لكل x من $]-2;1[\cup]1,+\infty[$ و أعط جــدول تغـــــــــيرات f

4- أدرس الفــــــروع اللانهائية للمنحنى (C_f) ثم أنـــشئ (C_f)

تمرين7

نعتبر الدالة f المعرفة بـ

$$\begin{cases} f(x)=\frac{x}{2}\sqrt{1+\frac{1}{x}} & x\succ 0 \\ f(x)=-\frac{x}{2}+\arctan x & x\le 0 \end{cases}$$

1- أ- حـدد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

ب- تأكد أن f مـتصلة في0 .

2- أدرس اشتقاق الدالة f على اليمين في 0 ثم اليسار في0 و أول النتيجتيـــن هندسيا.

3- أ- بين أن f تزايـدية قطعا على $]0,+\infty[$.

ب- حـــدد $f'(x)$ لكـــل x من $]-\infty,0[$.

ج- أعـط جـدول التغـيرات f .

4- حدد الفروع اللانهائية لـلمنحنى (C_f) ثم أنـــشئ (C_f)

أ- لتكن g قصور الدالة f على $]0;+\infty[$ نحو مجال I ينـبغي تحديده

ب - حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من I

تمرين 8

لتكن الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بمايلي f

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{3}x-\sqrt[3]{x} & x\ge 0 \\ f(x)=\frac{x}{x^2+1}+\arctan x & x\prec 0 \end{cases}$$

1- أحسب $f(8)$; $f(3\sqrt{3})$; $f(-1)$

-2 أدرس اشتقاق الدالة f على يمين 0 و يسار 0 ثم أول النتيجتين هندسيا.

-3 بين أن

$$\forall x \in]0;+\infty[\qquad f'(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$$

$$\forall x \in]-\infty;0[\qquad f'(x)=\frac{2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

-4 حدد جدول تغيرات f

-5 أ- أدرس الفروع اللانهائية

ب- أنشئ منحنى الدالة f في مستوى منسوب إلى معلم.م.م.

-6 ليكن g قصور الدالة f على المجال $]1;+\infty[$

أ- بين أن g تقابل من $]1;+\infty[$ نحو مجال يجيب تحديده

ب- أنشئ منحنى الدالة g^{-1}

تمرين9

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي $f(x)=\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}-1\right)$

1 - أدرس اشتقاق f على يمين 0 و أول النتيجة هندسيا

2 - احسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}_+^*$ و أعط جدول تغيرات f

3- I – ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى C_f

ب- بين أن $A(1\ ;\ 0)$ نقطة انعطاف للمنحنى C_f ثم أعط معادلة المماس للمنحنى عند هذه النقطة.

ج- أنشئ في معلم .م. م المنحنى C_f $\|\vec{i}\|=4cm$

-4 ليكن g قصور الدالة f على $I=\left[\frac{1}{8}\ ;+\infty\right[$

بين أن g تقابل من I نحو مجال J يجيب تحديده و حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J ثم أنشئ $C_{g^{-1}}$

تمرين10

-I لتكن h الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بما يلي $h(x)=3x-4x\sqrt{x}-\frac{1}{4}$

-1 أعط جدول تغيرات الدالة h على $\mathbb{R}^+$

-2 استنتج أن $h(x)\leq 0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}^+$

-II لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي $f(x)=(4x-1)\sqrt{x}-4x^2+\frac{1}{2}$

-1 أدرس قابلية اشتقاق f على يمين 0 و أول النتيجة هندسيا.

-2 أ- بين أن $f'(x)=\frac{2h(x)}{\sqrt{x}} \qquad \forall x\in\mathbb{R}_+^*$

ب- أعط جدول تغيرات الدالة f

ج- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى C_f .

-3 ليكن g قصور الدالة f على $I=\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$

أ- بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده

ب- استنتج أن المعادلة $g(x)=0$ $x\in I$ تقبل حلا وحيدا α من $\left]\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right[$

4- أنشئ في نفس المعلم المتعامد الممنظم المنحنيين C_f و $C_{g^{-1}}$.

(نقبل أن لـ C_f نقطة انعطاف وحيدة أفصولها $\frac{1}{4}$).

تمرين11

نعتبر f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}^+$ بـ $f(x)=1-\frac{x}{4}\left(\sqrt{x}-2\right)^2$

1- بين أن f قابلة الاشتقاق على يمين 0 .

2- بين أن $f'(x)=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)$ $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$ ثم أعط جدول تغيرات الدالة f .

3- أ- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى C_f.

ب- بين أن لـ C_f نقطة انعطاف يتم تحديد زوج إحداثيتيها .

4- ليكن g قصور الدالة f على $I=[4;+\infty[$

أ- بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده

ب- استنتج أن المعادلة $g(x)=0$ $x\in I$ تقبل حلا وحيدا α من $\left]\frac{64}{9};\frac{121}{16}\right[$.

ج- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J . ثم استنتج أن $\alpha=4+2\sqrt{3}$

د- أنشئ في نفس المعلم المتعامد الممنظم المنحنيين C_f و $C_{g^{-1}}$.

تمرين12

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بما يلي $f(x)=2\arctan\frac{2\sqrt{x}}{x+1}$

1- أ- أحسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{t\to0}\frac{\arctan t}{t}$

ت- بين أن $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ و أول النتيجة هندسيا

2- أدرس التغيرات الدالة f

3- أنشئ المنحنى C_f

4- نعتبر الدالة g قصور f على $I=[1;+\infty[$

أ- بين أن g تقابل من I نحو مجال J يجيب تحديده

ب- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J

5- بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α في $[1;2]$

6- نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي $\begin{cases}u_0=1\\u_{n+1}=f(u_n) & \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$

أ- أثبت أن $f(2)\succ\frac{\pi}{3}$

ب- بين أنه $1\le u_n\le2$ $\forall n\in\mathbb{N}$

ت- باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية، بين أنه لكل n من $\mathbb{N}$: $|u_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{4}|u_n-\alpha|$

د- استنتج أن $\lim u_n=\alpha$

تمرين13

I- 1) بين أن $\forall x\in\mathbb{R}\quad 1-x^2\le\frac{1}{1+x^2}\le1-x^2+x^4$

2) لتكن h الدالة المعرفة على بـ $h(x)=\arctan x-x+\frac{1}{3}x^3$

أ- بين أن $|h'(x)|\leq x^4$ $\forall x\in\mathbb{R}$

ب- استنتج أن $|h(x)-h(0)|\leq x^5$ $\forall x\in\mathbb{R}$

ج- بين أن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x-x}{x^2}=0$

II- لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ $g(x)=\frac{x}{2x^2+2x+1}-\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)$

1- أدرس تغيرات g (النهايات ، $g'(x)$، جدول التغيرات)

2- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا غير منعدم α ينتمي إلى $\left]-1;\frac{-1}{2}\right[$

3- استنتج إشارة $g(x)$ على $]-1;+\infty[$

III- لتكن f الدالة المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\arctan\left(\dfrac{x}{x+1}\right)-x}{x} & x\in]-1;0[\cup]1;+\infty[\\ f(0)=0 \quad ; \quad f(-1)=\dfrac{\pi}{2}-1 & \end{cases}$$

1- بين أن f متصلة على $[-1;+\infty[$

2- أحسب $f'(x)$ لكل x من $]-1;0[\cup]1;+\infty[$ و استنتج تغيرات الدالة f

3-أ- باستعمال السؤال (I -2- ج) أحسب $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan\frac{x}{x+1}-x}{x^2}$ ثم أول النتيجة هندسيا.

ب- أدرس قابلية اشتقاق f على يمين-1

4 - أنشئ المنحنى C_f (نأخذ $\alpha=-\frac{3}{4}$; $f(\alpha)=\frac{2}{3}$)

تمرين14

I- لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بمايلي

$$\begin{cases} f(x)=-x+\sqrt{x^2+1} & x\geq 0 \\ f(x)=\dfrac{4}{\pi}\arctan\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right) & x\prec 0 \end{cases}$$

1- أ- أدرس اتصال f في النقطة 0

ب- أدرس قابلية اشتقاق f في النقطة 0

2- أ- بين أن $f'(x)\prec 0$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$

ب- أعط جدول تغيرات محددا نهايتيها في $+\infty$ و $-\infty$

3- أنشئ C_f ($\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$)

4- نضع $I=\left[\frac{1}{4};1\right]$. بين أن $f(I)\subset I$

II- نعتبر المتتالية (u_n) بحيث $u_0=1$; $u_{n+1}=f(u_n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1- بين أن $|f'(x)|\prec\frac{4}{5}$ $\forall x\in I$

2- باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية، بين أن $\left|u_n - \frac{1}{\sqrt{3}}\right| \prec \frac{4}{5}\left|u_{n-1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right| \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

3- استنتج أن (u_n) متقاربة و حدد نهايتها

4- بين أن $f\left(\frac{1}{\tan x}\right) = \tan\frac{x}{2} \quad \forall x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

5- نضع $a_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

أ- تحقق أن $a_0 = 1 \quad ; \quad a_{n+1} = 2^{n+1} - a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ب- بين أن $u_n = \tan\frac{\pi a_n}{2^{n+2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$