

ح. بوعيون	الحسابيات في \mathbb{Z} (1)	الثانية ع ر سلسلة 7
-----------	----------------------------------	------------------------

<p>تمارين 8</p> <p>ليكن a و b من \mathbb{Z}^* و $n \in \mathbb{N}^*$.</p> <p>(1) بين أن $a^n \wedge b^n = (a \wedge b)^n$</p> <p>(2) استنتج أن $a^n / b^n = a / b$</p> <p>(3) بين أن $(\forall x \in \mathbb{Q}^*): x^n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$</p>	<p>تمارين 1</p> <p>(1) ما هو باقي قسمة العدد 1996^{1996} على 11 .</p> <p>(2) حدد باقي قسمة العدد $2222^{3333} + 3333^{2222}$ على 5 .</p> <p>(3) (a) $(\forall n \in \mathbb{N}) : 9/n4^{n+1} - (n+1)4^n + 1$</p> <p>(b) $(\forall n \in \mathbb{N}) : 6/n(2n+1)(7n+1)$</p> <p>(4) (a) حدد بواقي القسمة الأقليدية للأعداد 4^n على 7 .</p> <p>(b) حدد حسب قيم العدد n باقي قسمة العدد :</p> <p>$A = 851^{3n} + 851^{2n} + 2$ على 7 .</p> <p>(5) بين أنه إذا كان n عدد طبيعي غير مضاعف لـ 3 فإن</p> <p>$5^{2n} + 5^n + 1 \equiv 0 [31]$</p>
<p>تمارين 9</p> <p>نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة (1) $3x - 5y = 13$</p> <p>(1) حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة (1) .</p> <p>(2) حدد الحلول (x, y) للمعادلة (1) بحيث $\frac{x}{y} \in \mathbb{Z}$</p> <p>(3) بين أنه لكل k من \mathbb{Z} لدينا :</p> <p>$(5k+1) \wedge (3k-2) = (k-5) \wedge 13$</p> <p>(4) حل في \mathbb{Z}^2 النظام : $\begin{cases} 3x-5y=13 \\ x \wedge y = 13 \end{cases}$</p>	<p>تمارين 2</p> <p>حل في \mathbb{Z} المعادلتين :</p> <p>(1) $n+8 \equiv 0 [n-2]$</p> <p>(2) $3n-2 \equiv 0 [n+3]$</p>
<p>تمارين 10</p> <p>(1) بين أن : $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow (a^2 + b^2) \wedge ab = 1$</p> <p>لكل a و b من \mathbb{Z}^* .</p> <p>(2) نعتبر في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ النظام : $(S) : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1300 \\ (x \wedge y) \cdot (x \vee y) = 600 \end{cases}$</p> <p>ليكن (x, y) حل للنظمة (S) و $d = x \wedge y$</p> <p>(a) بين أن $d = 10$. (b) حل النظمة (S) .</p>	<p>تمارين 3</p> <p>ليكن A عدد فردي ومجموع مربعين كاملين .</p> <p>ما هو باقي قسمة A على 4 ؟</p>
<p>تمارين 11</p> <p>(1) بين أن $(5n^3 - n) \wedge (n+2) = (n+2) \wedge 38$</p> <p>(2) حدد قيم n التي يكون من أجلها $n + 2/5n^3 - n$</p> <p>(3) حدد القيم الممكنة للعدد $d = (5n^3 - n) \wedge (n+2)$</p> <p>(4) حدد قيم n التي يكون من أجلها $(5n^3 - n) \wedge (n+2) = 19$</p>	<p>تمارين 4</p> <p>ليكن a و b و c و d من \mathbb{Z}^* بحيث</p> <p>$a \wedge b = c \wedge d = 1$</p> <p>بين أن $ac \wedge bd = (a \wedge d) \cdot (b \wedge c)$</p>
<p>تمارين 12</p> <p>ليكن m و n و p أعداد من \mathbb{Z} بحيث :</p> <p>$mnp \equiv 0 [7]$ بين أن $m^3 + n^3 + p^3 \equiv 0 [7]$</p>	<p>تمارين 5</p> <p>(1) ليكن a و b من \mathbb{Z}^* بحيث $a \wedge b = 1$. أحسب</p> <p>(a) $(11a + 5b) \wedge (13a + 6b)$ (b) $(a^3 - b^3) \wedge (a^2 - b^2)$</p> <p>(2) أحسب $(n! + 1) \wedge ((n+1)! + 1)$</p>
<p>تمارين 13</p> <p>لكل $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ نضع</p> <p>$a = n^2 - 3n + 6$ و $b = n - 1$</p> <p>(1) بين أن : $a \wedge b = b \wedge 4$</p> <p>(2) استنتج $a \wedge b$ حسب قيم العدد n .</p>	<p>تمارين 6</p> <p>بين أنه لكل $n \in \mathbb{N}^*$ لدينا</p> <p>(1) $(21n+4) \wedge (14n+3) = 1$</p> <p>(2) $(n^3 + 2n) \wedge (n^4 + 3n^2 + 1) = 1$</p> <p>(3) $(2^n + 3^n) \wedge (2^{n+1} + 3^{n+1}) = 1$</p>
	<p>تمارين 7</p> <p>حل في \mathbb{N}^{*2} النظمات التالية :</p> <p>(1) $\begin{cases} xy = 1512 \\ x \wedge y = 6 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x + y = 48 \\ x \wedge y = 6 \end{cases}$</p> <p>(4) $\begin{cases} x \wedge y = 5 \\ x \vee y = 30 \end{cases}$ (5) $\begin{cases} x + y = 276 \\ x \vee y = 1440 \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x \vee y = 210(x \wedge y) \\ y - x = x \wedge y \end{cases}$</p> <p>(7) $\begin{cases} x \vee y - 3(x \wedge y) = 108 \\ 10 \leq x \wedge y \leq 15 \end{cases}$ (8) $x \vee y - (x \wedge y) = 187$</p>

(b) استنتج أن $p \equiv 1[4]$.
(7) ما هي مجموعة حلول المعادلة (E) ؟

تمرين 18

ليكن x عددا من \mathbb{N}^* بحيث: $\overline{36}^{(x)} + \overline{45}^{(x)} = \overline{103}^{(x)}$
أحسب $\overline{36}^{(x)} \times \overline{45}^{(x)}$

تمرين 19

ليكن a و b و c اعدادا من \mathbb{N} بحيث $\overline{N} \equiv abc^{(10)}$
بين أن $[17] \Rightarrow (2a - c)^2 + 2b^2 \equiv 0 [17]$ $N \equiv 0$

تمرين 20

ليكن n عدد صحيح طبيعي بحيث $n \geq 6$
نضع $d_n = a \wedge b$ و $a = \overline{2310}^{(n)}$ و $b = \overline{252}^{(n)}$
(1) بين أن $(2n+1)/a$ و $(2n+1)/b$
(2) حدد بدلالة n العدد $\Delta_n = (n^2 + n) \wedge (n+2)$ (ناقش حسب زوجية العدد n)
(3) بين أن $d_n \in \{2(2n+1), 2n+1\}$
(4) نأخذ $n=6$, حل في Z^2 في المعادلة:
 $ax + by = -26$

تمرين 21

نعتبر الأعداد x و y و z من \mathbb{N} بحيث:
 $z = \overline{101}^{(x)}$ و $y = \overline{131}^{(x)}$
(1) أكتب الجداء $x.y.z$ في نظمة العد ذات الأساس X .
(2) هل يمكن كتابة $x+y+z$ في نظمة العد ذات الأساس X ?
(3) إذا علمت أن: $x+y+z = 50$ (في نظمة العد العشري) فأحسب:
 $\overline{x.y.z}^{(10)}$ و $\overline{x+y+z}^{(x)}$
(4) ليكن $N = \overline{342y}^{(x)}$, حدد قيم لكي يكون هذا العدد قابلا للقسمة
أ - على 5 من أجل $x = 6$
ب - على 12 من أجل $x = 17$

تمرين 22

(1) ليكن m و n عددين طبيعيين وأولييين فيما بينهما
(a) بين أن $m+n$ و mn أوليان فيما بينهما.
(b) بين أن أحد العددين $a+b$ و ab فردي والآخر زوجي.
(2) ليكن x و y من \mathbb{N}^* , نضع
 $a = \frac{x}{\Delta}$ و $b = \frac{y}{\Delta}$ و $\Delta = x \wedge y$ و $M = x \vee y$
(a) بين أن $\begin{cases} x+y=120 \\ M=\Delta^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)ab=120 \\ ab=\Delta \end{cases}$
(b) استنتج في \mathbb{N}^{*2} حلول النظمة $\begin{cases} x+y=120 \\ M=\Delta^2 \end{cases}$.

تمرين 14

في كل ما سيأتي a و b عددين من Z^* أوليان فيما بينهما.
نضع $n = a^4 + b^4$.
(1) (a) بين أن $(\forall k \in Z): (2k+1)^4 \equiv 1[16]$ (لاحظ أن $2/k(k+1)$)
(b) استنتج من ذلك أن $n \equiv 1[16]$ أو $n \equiv 2[16]$.
(2) ليكن p قاسم أولي وفردي للعدد n .
(a) بين أن $p \wedge a = 1$ و $p \wedge b = 1$ (بالخلف).
(b) بين أنه يوجد c من Z بحيث $ca \equiv -1[p]$.
(c) استنتج أنه يوجد x من Z بحيث $x^4 \equiv -1[p]$.
(d) باستعمال القسمة الأقليدية ل p على 8 ثم Fermat بين أن
 $p \equiv 1[8]$.

تمرين 15

(1) (a) بين أن لكل a من Z : $a^2 \equiv 1[3]$ أو $a^2 \equiv 0[3]$
(b) استنتج أن:
 $(\forall (a,b) \in Z^2): a^2 + b^2 \equiv 0[3] \Rightarrow a \equiv b \equiv 0[3]$
(2) ليكن $(x,y,z) \in Z^3$ بحيث $x^2 + y^2 = 3z^2$
(a) بين أن: $x \equiv y \equiv 0[3]$ و $3z^2 \equiv 0[9]$
(b) استنتج أن: $x \equiv y \equiv z \equiv 0[3]$

تمرين 16

(1) حدد العدد x من \mathbb{N} بحيث $\overline{234x}^{(6)} \equiv 0[4]$
(2) حدد a و b و c من \mathbb{N} بحيث $\begin{cases} \overline{bacb}^{(10)} \equiv 0[7] \\ \overline{bacb}^{(10)} \equiv 0[99] \end{cases}$
(3) حدد x و y و z من \mathbb{N} بحيث $\overline{xyz}^{(7)} = \overline{zyx}^{(11)}$

تمرين 17

نعتبر في Z^2 المعادلة $(E) x^2 + y^3 = 7$
(I) بين أن المعادلة $x^2 + 1 \equiv 0[8]$ لا تقبل أي حل في Z .
(II) نفترض فيما يلي ان المعادلة (E) تقبل حلا (x,y) .
(1) بين أن y عدد فردي. نضع إذن $y = 2z+1$.
(2) تحقق أن $x^2 + 1 = (2-y)m$ حيث $m = 4z^2 + 8z + 7$
(3) بين أن $m \equiv 3[4]$.
(4) ليكن $m = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_r^{\alpha_r}$ تفكيك m إلى جداء من عوامل أولية.

بين أن

$$(\forall i \in \{1,2,\dots,r\}): P_i \equiv 1[4] \text{ أو } P_i \equiv 3[4]$$

(b) بين بالخلف أنه يوجد $1 \leq i \leq r$ بحيث $P_i \equiv 3[4]$

(5) استنتج مما سبق أنه يوجد عدد أولي p يحقق ما يلي:

$$\begin{cases} p \geq 3 \\ p \equiv 3[4] \\ x^2 + 1 \equiv 0[p] \end{cases}$$

(6) (a) بين أن $(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$

(لاحظ أن $-1 \equiv x^2[p]$ واستعمل Fermat).

$$\begin{cases} x+y=120 \\ M=\Delta^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)ab=120 \\ ab=\Delta \end{cases} \text{ بين أن (a)}$$

(b) استنتج في IN^{*2} حلول النظمة $\begin{cases} x+y=120 \\ M=\Delta^2 \end{cases}$.

تمرين 27

بين أن $(\forall (a,b) \in Z^2): a \wedge b = 1 \Rightarrow a \wedge b(a+b) = 1$

(2) ليكن x و y من IN^* بحيث $x(43-x) = y(x+y)$ نضع $x = dx'$ و $y = dy'$ و $x \wedge y = d$

(a) بين أن x'/d

(b) نضع $\alpha = \frac{d}{x'}$

بين أن $\alpha = 1$ و $\alpha(x'^2 + x'y' + y'^2) = 43$ واستنتج أن $\alpha = 1$

(3) حل في IN^{*2} المعادلة $x(43-x) = y(x+y)$

تمرين 28

لكل $n \in IN^*$ نضع $x_n = 2^n - 1$

(1) (a) بين أن $x_{n+1} = 2x_n + 1$ ($\forall n \in IN^*$)

(b) استنتج أن $x_{n+1} \wedge x_n = 1$ ($\forall n \in IN^*$)

(2) (a) بين أن $n \equiv 0[6] \Leftrightarrow x_n \equiv 0[9]$ (لاحظ أن $2^6 \equiv 1[9]$)

(b) استنتج أنه يوجد مالانهاية له من الأعداد $n \in IN^*$ بحيث $n \wedge x_n \neq 1$

(3) (a) بين أن $n/m \Rightarrow x_n/x_m$ ($\forall (n,m) \in IN^{*2}$)

(b) ليكن m و n من IN^* . بين أنه إذا كان r باقي قسمة m على n فإن x_r هو باقي قسمة x_m على x_n (لاحظ أن $2^n \equiv 1[x_n]$)

(c) استنتج أن $x_m \wedge x_n = x_n \wedge x_r$

(d) بين باستعمال خوارزمية أفليدس أن $(\forall (m,n) \in IN^{*2}): x_m \wedge x_n = x_{m \wedge n}$

(II) فيما يلي نريد أن نبين أن $(\forall k \in IN^*)(\exists i \in \{1,2,3,\dots,2k\}): 2k+1/x_i$ نفترض العكس يعني $(\exists k \in IN^*)(\forall i \in \{1,2,3,\dots,2k\}): x_i \neq 0[2k+1]$ ليكن R_i باقي قسمة x_i على $2k+1$

(1) تحقق أن $(\forall i \in \{1,2,3,\dots,2k\}): 1 \leq R_i \leq 2k$

(2) (a) بين أن $x_i \equiv 2k[2k+1] \Leftrightarrow 2^i \equiv 0[2k+1]$

(b) استنتج أن $(\forall i \in \{1,2,3,\dots,2k\}): R_i \neq 2k$

(3) بين أن البواقي R_i مختلفة مثلي مثلي.

(4) ماذا تستنتج؟

تمرين 23

ليكن $d = A \wedge B; B = 4k; A = 9(k+3) k \in IN^*$

(1) بين أن $d/108$

(2) حدد قيم k التي يكون من أجلها (i) 2 لا يقسم d

(ii) 3 لا يقسم d

(3) ليكن $k = 2 + 6m$ بين أن $d=1$

(b) حل في Z^2 المعادلة $Ax - By = 108$

تمرين 24

في IN^3 نعتبر المعادلة (1) $x^2 + 2y^2 = z^2$

(1) (a) بين أن $(\forall (m,n) \in IN^{*2}): \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow \frac{m}{n}$

(b) بين أنه يكفي أن تدرس الحالة التي يكون فيها $x \wedge y = 1$

فيما يلي نفترض أن $x \wedge y = 1$ في المعادلة (1)

(2) (a) بين أنه إذا كان (x, y, z) حلاً للمعادلة (1) فإن x و z فرديان و y زوجي

(b) نضع $d = (z-x) \wedge (z+x)$ بين أن d زوجي واستنتج أن $d=2$

(c) بين أنه إذا كان $a^2 = bc$ و $c \wedge b = 1$ فإنه يوجد c' و b' بحيث $b = b'^2$ و $c = c'^2$

(d) ليكن α و β من IN بحيث $3-x = 2\alpha$ و $3+x = 2\beta$ بين أن α أو β زوجي واستنتج حلول المعادلة (1).

تمرين 25

ليكن $(n \in IN^*)$ ، نضع :

$$C_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, B_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, A_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(1) بين أن A_n, B_n, C_n تنتمي ل IN^*

(2) احسب $A_n \wedge B_n$ (يمكن استعمال الموافقة بتريديد)

(3) نضع $D_n = C_n \wedge C_{n+1}$

(a) احسب D_n (يمكن استعمال الموافقة بتريديد)

(b) ليكن $n \in IN^* - \{1\}$ بين أن الأعداد C_n, C_{n+1}, C_{n+2} أولية فيما بينها.

تمرين 5 بين أن a و b من Z^* نضع $A = pa + qb$ و $B = ra + sb$ مع $(p, q, r, s) \in Z^4$ و $ps - qr = 1$ و $A \neq 0, B \neq 0$ بين أن $A \wedge B = a \wedge b$

تمرين 26

(1) ليكن m و n عددين طبيعيين وأولييين فيما بينهما

(a) بين أن $m+n$ و mn أوليان فيما بينهما

(b) بين أن أحد العددين $a+b$ و ab فردي والآخر زوجي

(2) ليكن x و y من IN^* ، نضع

$$a = \frac{x}{\Delta}, b = \frac{y}{\Delta} \text{ و } \Delta = x \wedge y \text{ و } M = x \vee y$$

تمرين 29

(1) ليكن x و y عدداً طبيعيين بحيث $x \wedge y = 1$

بين أن $x^\alpha \wedge y^\beta = 1$ لكل α, β من IN .

(2) ليكن $\frac{a}{b_1 b_2 \dots b_n}$ عدداً جذرياً غير منعدم بحيث $b_i \wedge b_j = 1$

$\forall i \neq j$. أثبت وجود أعداد صحيحة نسبية a_1, a_2, \dots, a_n بحيث

$$\frac{a}{b_1 b_2 \dots b_n} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n}$$

(3) ليكن a من Z^* و b من IN^* غير أولي. أثبت وجود أعداد نسبية غير

منعدمة $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ بحيث $b_i \wedge b_j = 1$

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n}$$

تمرين 30

(a) بين أن لكل a من Z : $a^2 \equiv 0[3]$ أو $a^2 \equiv 1[3]$ (b) استنتج أن :

$$(\forall (a, b) \in Z^2) : a^2 + b^2 \equiv 0[3] \Rightarrow a \equiv b \equiv 0[3]$$

(2) ليكن $(x, y, z) \in Z^3$ بحيث $x^2 + y^2 = 3z^2$

(a) بين أن : $x \equiv y \equiv 0[3]$ و $3z^2 \equiv 0[9]$

(b) استنتج أن : $x \equiv y \equiv z \equiv 0[3]$

تمرين 31

(1) بين أن :

$$(\forall a, b) \in Z^2 : a \wedge b = 1 \Leftrightarrow (a+b) \wedge (a^2 + ab + b^2) = 1$$

(2) حل في Z^2 النظمة :

$$\begin{cases} 19(a+b) = 5(a^2 + ab + b^2) \\ a \wedge b = 1 \end{cases}$$

(3) حل في Z^2 المعادلة :

$$.19(a+b)(a \wedge b) = 5(a^2 + ab + b^2)$$