2 علوم رياضية مادة الرياضيات الأعداد العقدية

التمريـــــن 1:

حدد في المستوى العقدي المجموعات التالية :

$$E=\left\{M(z)/\, z+\frac{1}{z}\in i\mathbb{R}\right\} \quad ، \quad F=\left\{M(z)/\, z+\frac{1}{z}\in \mathbb{R}\right\} \quad ، \quad G=\left\{M(z)/\, z-\bar{z}=2i|z|\right\}$$

التمريـــــن 2:

1.حدد العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون العدد $1+i$ حلا للمعادلة $z^2-az+b=0$.

2.نضع $z=\frac{a-3i}{\sqrt{3}+bi}$.حدد العددين الحقيقيين a و b بحيث $|z|=2$ و $\arg z\equiv\frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$

التمريـــــن 3:

نعتبر أعدادا عقدية a و b و c حيث : $a+b+c=abc=1$ و $|a|=|b|=|c|=1$

1. بين أن $ab+bc+ca=1$

2. حدد $a^2+b^2+c^2$ و $a^3+b^3+c^3$

التمريـــــن 4:

ليكن a و b عددين عقديين .

1.بين أن : $\left(|a+b|+i|a-b|\right)\left(|a+b|-i|a-b|\right)=2\left(|a|^2+|b|^2\right)$

2.بين أن : $\left|(a+b)^2\right|-\left|(a-b)^2\right|=4\mathrm{Re}\left(a\bar{b}\right)$

التمريـــــن 5:

نعتبر في C المعادلة التالية: $z^2-(2u-i\bar{u})z-2iu\bar{u}=0$ حيث u عدد عقدي معلوم وغير منعدم .

1.حدد في المجموعة C حلي المعادلة .

2.في المستوى العقدي المنسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.

نعتبر النقط M و M' و M'' التي الحاقها على التوالي هي : u ، $z'=-i\bar{u}$ ، $z''=2u$.

أ.بين أن النقط M و M' و M'' مستقيمية اذا وفقط اذا كان $|\mathrm{Re}(u)|=|\mathrm{Im}(u)|$.

ب.نفترض أن $|\mathrm{Re}(u)|\neq|\mathrm{Im}(u)|$.

بين ان المثلث OMM' متساوي الساقين .

التمريـــــن 6:

اكتب على الشكل المثلثي الأعداد التالية :

$$z_1=3i \quad ، \quad z_2=-3i \quad ، \quad z_3=-\sqrt{3}+1 \quad ، \quad z_4=1+\sqrt{7} \quad ، \quad z_5=1-i$$

$$z_6=1+i\sqrt{3} \quad ، \quad z_7=2i\left(i-\sqrt{3}\right) \quad ، \quad z_8=\frac{-2+2i}{1-i\sqrt{3}} \quad ، \quad z_9=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{i-1}\right)^{12} \quad ، \quad z_{10}=\frac{(1+i)\left(1-i\sqrt{3}\right)}{(2-2i)^3}$$

التمريـــــن 7:

ليكن θ عنصرا من المجال $[0,2\pi[$.

اكتب على الشكل المثلثي كلا من الأعداد العقدية التالية :

$$z_1=1+\cos\theta+i\sin\theta \quad ، \quad z_2=1-\cos\theta+i\sin\theta$$

$$z_3=1-\cos\theta-i\sin\theta \quad ، \quad z_4=1+\cos\theta-i\sin\theta$$

تقديـــــم : ذ. العربي الوظيفي

التمريـــــن 8:

ليكن θ عنصرا من المجال $]-\pi,\pi]$.

1.حدد العدد $z=-1+e^{i\theta}$ على الشكل المثلثي.

2.استنتج عمدة ومعيار العدد العقدي $u=\sqrt{3}-2+i$.

التمريـــــن 9:

نعتبر العدد العقدي $u=\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

1.حدد العدد العقدي u^2 على الشكل المثلثي .

2.استنتج u على الشكل المثلثي.

التمريـــــن 10:

ليكن z عددا عقديا بحيث $\operatorname{Im}(z)\succ 0$. بين أن : $\left|\frac{z-i}{z+i}\right|\prec 1$

التمريـــــن 11:

حدد العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون العدد العقدي $1+3i$ حلا للمعادلة $z^2-a\bar{z}+b=0$.

التمريـــــن 12:

ليكن θ عددا حقيقيا بحيث $0\prec\theta\prec\frac{\pi}{2}$. نضع : $a=\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$ و $b=\frac{-1+\cos\theta+i\sin\theta}{1+co\theta+i\sin\theta}$.

1.اكتب كلا من العددين a و b على الشكل المثلثي.

2.حدد الجذور من الرتبة الرابعة للعدد a.

3.اعط على الشكل الجبري حلول المعادلة : $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^4=2$; $z\in\mathbb{C}$.

التمريـــــن 13:

لكل z عدد عقدي مخالف للعدد (-1). نضع $f(z)=\frac{iz-1}{(z+1)^2}$.

1. أ. حدد العقدي y بحيث $f(iy)=iy$.

ب. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E): f(z)=z$.

نرمز ب z_0 و z_1 و z_2 لحلول المعادلة (E) حيث $R(z_0)=0$ و $R(z_1)\succ R(z_2)$.

2. أ. تحقق أن $z_1+1=e^{i\frac{11\pi}{6}}$ و $z_2+1=e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

ب. استنتج الكتابة المثلثية لكل من العددين z_1 و z_2.

3. نضع $z=e^{i\alpha}$ حيث $0\le\alpha\prec\pi$.

أ. بين أن : $\overline{f(z)}=izf(z)$.

ب. حدد α إذا علمت أن $f(z)+\overline{f(z)}=0$.

ج. اكتب $f(z)$ على الشكل الأسي.

4.حدد z إذا علمت أن $\operatorname{Re}(f(z))=\frac{1}{2}$ و $|z|=1$.

تقديـــــم : ذ. العربي الوظيفي

التمريـــــن 14:

1. بين أن $(\forall x\in \mathbb{R}) :\ \arg(1+ix)\equiv \mathrm{arct}(x)$
2. ليكن (α,β) عنصرا من $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$.

حدد معيار وعمدة العدد العقدي $\alpha\frac{1+i\beta}{1-i\beta}$.

التمريـــــن 15:

1. بين أن $(\forall z\in \mathbb{R}):\ |z+1|=|z|+1 \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}^+$.
2. ليكن z_1 و z_2 عددين عقديين غير منعدمين .

بين أن : $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2| \ \Leftrightarrow\ \arg(z_1)\equiv\arg(z_2)\ [\pi]$

التمريـــــن 16:

ليكن n عددا طبيعيا غير منعدم.نعتبر العدد العقدي : $z=\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

نضع : $S=\sum_{k=0}^{n-1}z^k$ و $S_n=\sum_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

1. اكتب S على الشكل الجبري.
2. استنتج أن : $S_n=\frac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}}$.
3. احسب $\lim S_n$ و $\lim\frac{S_n}{n}$.

التمريـــــن 17:

لكل عدد عقدي z نضع $P(z)=z^2-(2+6i)z$

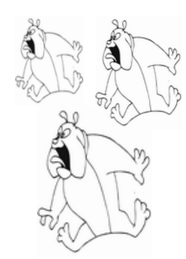
1. حل في C المعادلة $P(z)=4-6i$.
2. نضع : $u=1+5i$ و $v=1+i$ و $w=239-i$ و $\alpha=\arctan\frac{1}{5}$ و $\beta=\arctan\frac{1}{239}$.

أ. تحقق أن : $u^4v=4w$.

ب. حدد عمدة للعدد u بدلالة α و عمدة للعدد w بدلالة β.

ج. استنتج أن: $4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$.

التمريـــــن 18:



ليكن θ عددا حقيقيا من المجال $]0,2\pi[$. نضع $u=e^{i\theta}$.

1. حدد الشكل المثلثي للعدد العقدي z الذي يحقق $u=\frac{z-i}{z+i}$.
2. نعتبر في C المعادلة : $(E):(z^2+1)^n-(z+i)^{2n}=0$ حيث n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .

أ.تحقق أن $(-i)$ حل للمعادلة (E)

ب.حل المعادلة (E).

تقديـــــم : ذ. العربي الوظيفي

التمريـــــن 19:

نعتبر العدد العقدي $z=e^{i\alpha}$ حيث α عنصر من $]-\pi;0[\cup]0;\pi[$.

1. حدد بدلالة α معيار وعمدة العددين العقديين $1+z$ و $z-1$.

2. نفترض أن $\alpha=\frac{2\pi}{1+2n}$ حيث n عدد طبيعي غير منعدم .

أ. بين أن : $\frac{2}{1+z}=\sum_{k=0}^{2n}(-z)^k$ ثم استنتج أن $\frac{2}{1+2n}\leq|1+z|$.

ب. بين أن : $\frac{1}{1+2n}\leqslant\cos\frac{\pi}{1+2n}$.

3. نفترض أن $0\prec\alpha\prec\pi$. نضع $Z=\frac{z(z+1)}{(z-1)^2}$.

بين أن $\overline{Z}=\frac{1+z}{(1-z)^2}$ ثم حدد معيار وعمدة Z بدلالة α .

4. لتكن (E) مجموعة النقط $M(z)$ في المستوى العقدي عندما يتغير α في المجال $]0;\pi[$.

أ. اكتب معادلة ديكارتية للمجموعة (E) .

ب. أنشئ المجموعة (E) .

التمريـــــن 20:

لكل عدد عقدي غير منعدم z نضع : $f(z)=\frac{z^2+4i}{z}$.

1. تحقق أن $z_1=1+i\sqrt{3}$ حل للمعادلة $f(z)=(1+\sqrt{3})(1+i)\ ;\ z\in C$. استنتج الحل الثاني .

2. نضع $u=2e^{-i\frac{\pi}{12}}$. حدد $f(u)$ على الشكل المثلثي .

3. في المستوى العقدي نعتبر النقط O و A و B التي ألحاقها على التوالي 0 و z_1 و z_2 .

أ. بين أن المثلث OAB متساوي الساقين رأسه O .

ب. حدد قياسا للزاوية $(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB})$.

التمريـــــن 21:

ليكن a في C^* . نضع $z_1=-\bar{j}(z-a)+a$ و $z_2=\bar{j}(z+a)-a$ حيث $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$

في المستوى العقدي A و B و M_1 و M_2 و M نقط ألحاقها على التوالي a و $(-a)$ و z_1 و z_2 و z .

لتكن (C) الدائرة التي مركزها O وشعاعها $|a|$.

1. نفرض أن $M\neq A$.

أ. بين أن : $\frac{z_2-z}{z_1-z}=-\frac{a+z}{a-z}i\sqrt{3}$.

ب. بين انه اذا كانت $M\in(C)$ فان M و M_1 و M_2 مستقيمية .

ج. بين انه اذا كانت M و M_1 و M_2 مستقيمية فان $M\in(C)$.

2. نضع $z'=\frac{au-\bar{u}z}{a-z}$ حيث u عدد عقدي يحقق $Im(u)\neq0$ و $z\neq a$.

بين ان $M(z)\in(C)\Leftrightarrow z'\in R$.

التمريـــــن 22:

لكل عدد عقدي z من $C-\{i\}$ نضع : $f(z)=\frac{iz-1}{iz+1}$.

1.حل في C المعادلة : $f(z)=z$.

2.حدد المجموعة $E=\{M(z)/f(z)=f(\bar{z})\}$.

3. أ.بين أن لكل z من $C-\{i\}$: $|z|=1 \Leftrightarrow f(z)\in iR$.

ب. بين أن لكل z من $C-\{i\}$: $\mathrm{Im}(z)\succ 0 \Leftrightarrow |f(z)|\prec 1$.

ج. حدد وانشئ مجموعة النقط $M(z)$ حيث $|f(z)|\prec 1$ و $f(z)\in iR$

التمريـــــن 23:

لتكن (Z_n)متتالية الاعداد العقدية المعرفة بما يلي : $Z_0=\cos x+i\sin x$ و $Z_{n+1}=Z_n+|Z_n|$ $(\forall n\in N)$

حيث x عنصر من المجال $]0;\pi/2[$.

1.أكتب على الشكل المثلثي العدد Z_1 .

2.لتكن(α_n)المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $\alpha_n\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ و $\alpha_n\equiv\arg Z_n\ [2\pi]$ $(\forall n\in N)$

أ. بين ان المتتالية(α_n)هندسية اساسها $q=\frac{1}{2}$.

ب. استنتج (α_n) بدلالة x

3.لتكن(v_n)المتتالية المعرفة بما يلي : $v_n=Z_n-\overline{Z_n}$ $(\forall n\in N)$.

أ. عبرعن v_{n+1} بدلالة v_n.ماذا تستنتج .

ب. بين ان : $|Z_n|=\frac{\sin x}{\sin(x/2^n)}$ $(\forall n\in N)$.

4.بين ان : $Z_n-Z_0=|Z_0|+|Z_1|+......+|Z_{n-1}|$ $(\forall n\in N^*)$.

5.استنتج انه لكل n من N^* : $\cot an\frac{x}{2^n}-\cot an x=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\sin(x/2)}+.....+\frac{1}{\sin(x/2^{n-1})}$

التمريـــــن 24:

ليكن a عددا عقديا و n عددا صحيحا طبيعيا يخالف 0 و 1 .

نعتبر المعادلة $(E):(z-a)^n=(z-\bar{a})^n$

1.بين أن صور حلول المعادلة مستقيمية .

2.ليكن z حلا للمعادلة (E) .

بين أن $z=\mathrm{Re}(a)-\mathrm{Im}(a).\cot an\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ حيث k عدد طبيعي بحيث $1\leq k\leq n-1$.

التمريـــــن 25:

ليكن a عددا تخيليا صرفا و n عددا من N بحيث $n \geq 2$. نعتبر المعادلة : $(E) \quad \left(z+\bar{a}\right)^n - \left(a-\bar{z}\right)^n = 0$

1.لتكن S مجموعة حلول المعادلة (E). بين أن $z \in S \Rightarrow z \in R$.

2.حل في C المعادلة (E) .

3.نعتبر المعادلة $(F): (z+i)^n - e^{i\alpha}(z-i)^n = 0$ حيث : $\alpha \neq 2k\pi$ و $k \in Z$.

أ. بين ان حلول المعادلة (F) تنتمي الى R.

ب. حل في C المعادلة (F) .

4.نضع $P(z) = (z+i)^n - e^{i\alpha}(z-i)^n$.

أ. حدد درجة الحدودية P.

ب. نضع : $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$. حدد a_0 بدلالة α .

ج. ليكن z_1 و z_2 و....... z_n حلول المعادلة $P(z) = 0$. بين ان : $z_1 \times z_2 \times .... \times z_n = (-1)^n \times \frac{a_0}{a_n}$.

د.استنتج ان $\left(\forall p \in N^*\right) \quad \prod_{k=1}^{2p+1} \cotan\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{4p+2}\right) = (-1)^p \cotan\frac{\alpha}{2}$

التمريـــــن 26:

لكل z من $C-\{-1\}$. نضع $u = \frac{iz^2}{z+1}$. نعتبر (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ حيث يكون u عددا تخيليا صرفا

1.أ.بين ان: $M(z) \in (\Gamma) \Leftrightarrow (z \neq -1)$ و $\left[\left(|z|^2 + 2\mathrm{Re}(z) = 0\right)\right.$ أو $\left.\bar{z} = z\right]$

ب.حدد و انشئ (Γ).

2.نضع $z = e^{i\theta}$ حيث $\theta \in]-\pi, \pi[$.

أ.حدد الشكل المثلثي للعدد u.

ب.بين ان للنظمة $\begin{cases} z = e^{i\theta} \\ u \in iR \end{cases}$ ثلاث حلول صورها في المستوى العقدي تكون رؤوس مثلث متساوي الاضلاع .

التمريـــــن 27:

نعتبر التطبيق f من المستوى P نحو P المعرف بما يلي : $(\forall z \in C): \ f(z) = z\left(\left(\bar{z}\right)^2 + 2\right)$

1.احسب العدد $f\left(\sqrt{2}e^{i\alpha}\right)$ حيث α عنصر من المجال $[0,2\pi[$.

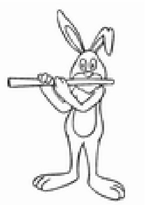
2.حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $f(z) \in R$.

3. في المستوى العقدي المنسوب إلى م م م م $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقطتين $M(z)$ و $M'(f(z))$.

أ.بين أن $\overrightarrow{MM'}$ و $\vec{u}$ مستقيميتان إذا وفقط إذا كان $\left(|z| = 1\right.$ أو $\left.z \in R\right)$

ب.نفترض أن $|z| = 1$. لتكن N النقطة التي يكون من أجلها OMM’N متوازي الأضلاع .

بين أن : $MN = M'N = 1$.



4.نعتبر العدد العقدي $a = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

أ.حل في C : $2z^2 - az + 1 = 0$.

ب.استنتج أنه توجد نقطة وحيدة $M(z)$ من الدائرة المثلثية حيث $f(z) = a$

تقديـــــم : ذ. العربي الوظيفي

التمريـــــن 28:

ليكن θ حقيقيا من $\left]-\pi/2\,;\,3\pi/2\right[-\{\pi/2\}$. نضع $u=e^{i\theta}$.

1.أ.تحقق أن : $u\neq i$ و $u\neq -i$.

ب. حدد معيار وعمدة لكل من العددين $(1+iu)$ و $(-1+iu)$.

http://www.vrac-coloriages.net

2.نفترض أن $\theta=\frac{-\pi}{8p+6}$ حيث p عدد صحيح طبيعي غير منعدم .

أ.بين أن $\sum_{k=0}^{4p+2}(iu)^k=\frac{-2}{-1+iu}$

ب. استنتج أن : $\left|-1+iu\right|\geq\frac{2}{4p+3}$.

ج.بين أن : $\sin\frac{(2p+1)\pi}{8p+6}\geq\frac{1}{4p+3}$

3.نفترض في هذا السؤال ان $\theta\in\left]-\pi/2\,;\,\pi/2\right[$.نضع $f(u)=\frac{u(u-i)}{(u-i)^2}$.

أ.بين أن $\overline{f(u)}=\frac{1+iu}{(-1+iu)^2}$.

ب.اكتب $\overline{f(u)}$ ثم $f(u)$ على الشكل المثلثي .

ج.لتكن Γ مجموعة النقط $M(f(u))$ حيث θ يتغير في $\left]-\pi/2\,;\,\pi/2\right[$.

بين أن Γ هي منحنى الدالة φ المعرفة على المجال $\left]-\infty\,;0\right]$ بما يلي : $\phi(x)=-\sqrt{\frac{|x|}{2}}$.

التمريـــــن 29:

لتكن a و b وc أعداداً عقدية صورها على التوالي في المستوى العقدي هي النُقط A و B و C .

نعتبر الدوران $r\left(C,\frac{\pi}{3}\right)$. نضع $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1.احسب j^3 واستنتج j^n لكل n من N ثم احسب $\sum_{k=0}^{2010}j^k$.

2.تحقق أن $e^{i\frac{\pi}{3}}=-j^2$ و $1+j+j^2=0$.

3.أثبت أن الكتابة العقدية للدوران r هي : $z'=-j^2z-jc$

4. أ.بين أن ABC متساوي الأضلاع يكافئ $(a+j^2b+jc=0$ أو $a+jb+j^2c=0)$.

ب.نعتبر النقطتين $E(z)$ و $F(j)$. حدد قيم z بحيث يكون المثلث OEF متساوي الأضلاع.

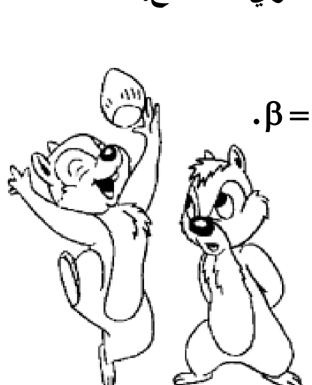
التمريـــــن 30:

1. نعتبر العدد العقدي $z_0=e^{i\frac{2\pi}{5}}$. نضع : $\alpha=z_0+z_0^{\ 4}$ و $\beta=z_0^{\ 2}+z_0^{\ 3}$.

أ.بين أن : $1+z_0+z_0^{\ 2}+z_0^{\ 3}+z_0^{\ 4}=0$

ب.استنتج أن α و β هما حلي المعادلة $X^2+X-1=0$ (E).

ج. حدد α بدلالة $\cos\frac{2\pi}{5}$.



د.حل المعادلة (E) ثم استنتج قيمة $\cos\frac{2\pi}{5}$.

تقديــــم : ذ. العربي الوظيفي

2.مثل النقط A_0 و A_1 و A_2 و A_3 و A_4 صور 1 و z_0 و $z_0^{\ 2}$ و $z_0^{\ 3}$ و $z_0^{\ 4}$ على التوالي في المستوى العقدي.