تمارين

تمارين محلولة

تمرين1

حدد $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{x}}{x}$; $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x-3}{x}\right)$; $\lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}}$

الحل

نحدد $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{x}}{x}$; $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x-3}{x}\right)$; $\lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}}$

* $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^{2x}-1}{x}-\frac{e^{x}-1}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[2\frac{e^{2x}-1}{2x}-\frac{e^{x}-1}{x}\right]=2-1=1$$

* نضع $t=-\frac{3}{x}$ أي $x=-\frac{3}{t}$

ومنه $$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x-3}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1-\frac{3}{x}\right)=\lim_{t\to 0}\left[-3\frac{\ln(1+t)}{t}\right]=-3$$

* $$\lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+} e^{\sqrt{x}\ln x}=\lim_{x\to 0^+} e^{2\sqrt{x}\ln\sqrt{x}}=1$$

تمرين2

نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ: $f(x)=\ln\left(e^{2x}-3e^{x}+3\right)$

1- حدد D_f و نهايات f عند محدات D_f

2- حل المتراجحة $f(x)\geq 0$

3- حدد $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)$

الحل

$$f(x)=\ln\left(e^{2x}-3e^{x}+3\right)$$

4- نحدد D_f

لتكن $x\in\mathbb{R}$

$$x\in D_f \Leftrightarrow e^{2x}-3e^{x}+3\succ 0$$

ليكن Δ مميز X^2-3X+3 و منه $\Delta=-3$ و بالتالي $e^{2x}-3e^{x}+3\succ 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

إذن $D_f=\mathbb{R}$

* نحدد نهايات f عند محدات D_f

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(e^{2x}-3e^{x}+3\right)\lim_{x\to+\infty}\ln\left[e^{2x}\left(1-3e^{-x}+3e^{-2x}\right)\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\ln\left(e^{2x}-3e^{x}+3\right)=\ln 3$$

5- نحل المتراجحة $f(x)\geq 0$

$$f(x)\geq 0 \Leftrightarrow \ln\left(e^{2x}-3e^{x}+3\right)\geq 0$$
$$f(x)\geq 0 \Leftrightarrow e^{2x}-3e^{x}+3\geq 1$$
$$f(x)\geq 0 \Leftrightarrow e^{2x}-3e^{x}+2\geq 0$$
$$f(x)\geq 0 \Leftrightarrow \left(e^{x}-1\right)\left(e^{x}-2\right)\geq 0$$
$$f(x)\geq 0 \Leftrightarrow e^{x}\in[0;1]\cup[2;+\infty[$$
$$f(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in]-\infty;0]\cup[\ln 2;+\infty[$$

إذن $S=]-\infty;0]\cup[\ln 2;+\infty[$

-6 نحدد $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim_{x\to+\infty}(\ln\left(e^{2x}-3e^{x}+3\right)-2x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1-\frac{3}{e^{x}}+\frac{3}{e^{2x}}\right)=0$$

تمرين3

نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x+1+e^{-x}$

-1 أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

ب- أحسب $f'(x)$ و أعط جدول تغيرات f و استنتج إشارة $f(x)$

-2 نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=\ln\left(x+1+e^{-x}\right)$

أ- أدرس تغيرات g و أعط جدول تغيراتها

ب- a) حدد $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)+x$ وأول النتيجة هندسيا

b) بين أن $g(x)+x\prec 0$ $\forall x\in]-\infty;-1[$

c) بين أن $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}$ $0\prec g(x)-\ln x\leq\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$ استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)-\ln x$.

الحل

$$f(x)=x+1+e^{-x}$$

-1 أ- نحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x+1+e^{-x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x+1+e^{-x}=\lim_{x\to-\infty}-x\left(-1-\frac{1}{x}+\frac{e^{-x}}{-x}\right)=+\infty$$

ب- نحسب $f'(x)$ و نعطي جدول تغيرات f و نستنتج إشارة $f(x)$

$f'(x)=1-e^{-x}$ $\forall x\in\mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
f	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

لدينا f تناقصية على $]-\infty;0]$ و تزايدية على $[0;+\infty[$ و منه $f(x)\geq f(0)\succ 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

-2 نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=\ln\left(x+1+e^{-x}\right)$

أ- ندرس تغيرات g و نعطي جدول تغيراتها $\forall x\in\mathbb{R} \quad g'(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{x+1+e^{-x}}=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
g	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

ب- a) نحدد $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)+x$ ونؤول النتيجة هندسيا

$$\lim_{x\to-\infty}\left(g(x)+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\ln\left(x+1+e^{-x}\right)+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\ln\left(x+1+e^{-x}\right)+\ln e^{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\ln\left(xe^{x}+e^{x}+1\right)=\lim_{x\to-\infty}\ln\left(-\frac{-x}{e^{-x}}+e^{x}+1\right)=0$$

ومنه المستقيم ذا المعادلة $y=x$ مقارب للمنحنى (C_g) بجوار $+\infty$

b) نبين أن $g(x)+x\prec 0 \quad \forall x\in\left]-\infty;-1\right[$

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad g(x)+x=\ln\left(xe^{x}+e^{x}+1\right)=\ln\left((x+1)e^{x}+1\right)$$

ليكن $x\in\left]-\infty;-1\right[$ ومنه $x+1\prec 0$ و بالتالي $e^{x}(x+1)+1\prec 1$

و منه $\ln\left(e^{x}(x+1)+1\right)\prec 0$ إذن $g(x)+x\prec 0 \quad \forall x\in\left]-\infty;-1\right[$

c) نبين أن $0\prec g(x)-\ln x\le\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right) \quad \forall x\in\mathbb{R}^{+*}$. و نستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)-\ln x$

$$\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\qquad g(x)-\ln x=\ln\left(x+1+e^{-x}\right)-\ln x=\ln\left(\frac{x+1+e^{-x}}{x}\right)$$

لدينا $\dfrac{x+1+e^{-x}}{x}\succ 1 \quad \forall x\in\mathbb{R}^{+*}$ إذن $g(x)-\ln x\succ 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}^{+*}$

لدينا $e^{-x}\prec 1 \quad \forall x\in\mathbb{R}^{+*}$ ومنه $1+x+e^{-x}\prec x+2$ و بالتالي $\dfrac{1+x+e^{-x}}{x}\prec\dfrac{x+2}{x}$

ومنه $\ln\dfrac{1+x+e^{-x}}{x}\prec\ln\dfrac{x+2}{x}$

إذن $0\prec g(x)-\ln x\le\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right) \quad \forall x\in\mathbb{R}^{+*}$

تمرين4

نعتبر الدالة العددية f لمتغير حقيقي المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} f(x)=\left|2x\left(1-\ln x\right)\right| & x\succ 0\\ f(x)=e^{x}-1-2\sqrt{1-e^{x}} & x\le 0\end{cases}$$

1- أدرس اشتقاق و اتصال f عند النقطتين 0 و e
و أعط التأويل الهندسي للنتائج المحصل عليها

2- أحسب نهايات f عند محدات D_f ثم أدرس الفروع للانهائية لـ C_f

3- أدرس تغيرات f و أنشئ C_f $\quad \|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2\,cm$

4- بين أن g قصور الدالة f على $\left]-\infty;0\right]$ تقابل من $\left]-\infty;0\right]$ نحو مجال J يجيب تحديده

أحسب $g^{-1}(x)$ لكل x من J

الحل

$$\begin{cases} f(x)=\left|2x(1-\ln x)\right| & x \succ 0 \\ f(x)=e^x-1-2\sqrt{1-e^x} & x \le 0 \end{cases}$$

1- ندرس اتصال و اشتقاق f عند النقطتين 0 و e نؤول هندسيا للنتائج المحصل عليها

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left|2x(1-\ln x)\right|=\lim_{x\to 0^+}\left|2x-2x\ln x\right|=0=f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} e^x-1-2\sqrt{1-e^x}=0=f(0)$$

إذن f متصلة في 0

$$\lim_{x\to e} f(x)=\lim_{x\to e}\left|2x(1-\ln x)\right|=0=f(e)$$ إذن f متصلة في e

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left|2x(1-\ln x)\right|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left|2(1-\ln x)\right|=+\infty$$

إذن f غير قابلة للاشتقاق في 0 على اليمين و منحناها يقبل نصف مماس عمودي على يمين 0

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1-2\sqrt{1-e^x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{e^x-1}{x}+2\frac{e^x-1}{x}\times\frac{1}{\sqrt{1-e^x}}\right]=+\infty$$

إذن f غير قابلة للاشتقاق في 0 على اليسار و منحناها يقبل نصف مماس عمودي على يسار 0

$$\lim_{x\to e^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-e}=\lim_{x\to e^+}\frac{\left|2x(1-\ln x)\right|}{x-e}=\lim_{x\to e^+}2x\frac{\ln x-1}{x-e}=2e\times\frac{1}{e}=2$$

إذن f قابلة للاشتقاق في e على اليمين و منحناها يقبل نصف مماس على يمين e معامله الموجه 2

$$\lim_{x\to e^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-e}=\lim_{x\to e^-}\frac{\left|2x(1-\ln x)\right|}{x-e}=\lim_{x\to e^-}-2x\frac{\ln x-1}{x-e}=-2e\times\frac{1}{e}=-2$$

إذن f قابلة للاشتقاق في e على اليسار و منحناها يقبل نصف مماس على يسار e معامله الموجه -2

2- نحسب نهايات f عند محدات D_f ثم ندرس الفروع اللانهائية لـ C_f

$$D_f=\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^x-1-2\sqrt{1-e^x}=-3 \text{ و } \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left|2x(1-\ln x)\right|=+\infty$$

ومنه المستقيم ذا المعادلة $y=-3$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left|2x(1-\ln x)\right|}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left|2(1-\ln x)\right|=+\infty$$

ومنه (C_f) يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأراتيب

3- ندرس تغيرات f و ننشئ C_f

$$\forall x\in\left]0;e\right[\quad f'(x)=\left[2x(1-\ln x)\right]'=2(1-\ln x)-2=-\ln x$$

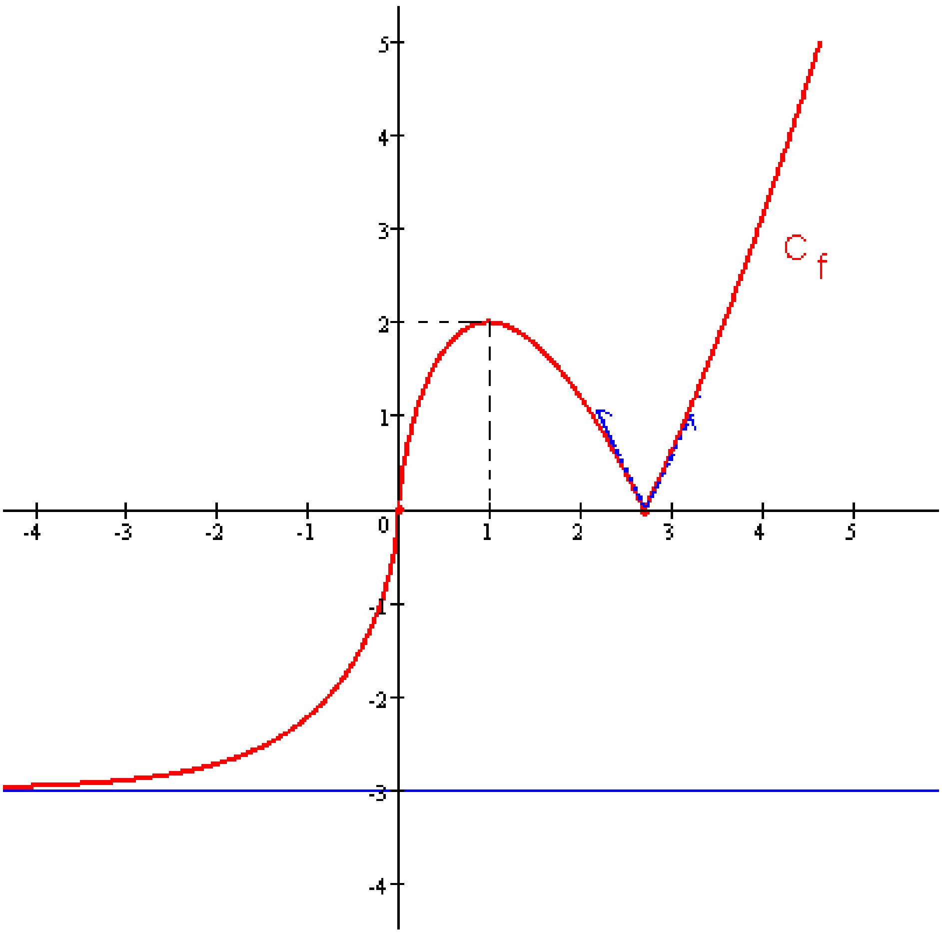
$$\forall x\in\left]e;+\infty\right[\quad f'(x)=\left[-2x(1-\ln x)\right]'=-2(1-\ln x)+2=\ln x$$

$$\forall x\in\left]e;+\infty\right[\qquad f'(x)=\left(e^x-1-2\sqrt{1-e^x}\right)'=e^x+\frac{e^x}{\sqrt{1-e^x}}$$

x	$-\infty$		0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	0	-	‖	+	

$f(x)$	$-3 \nearrow$ 0 $\nearrow 2 \searrow 0 \nearrow +\infty$

إنشاء (C_f)



4- نبين أن g قصور الدالة f على $]-\infty;0]$ تقابل من $]-\infty;0]$ نحو مجال J يجيب تحديده

لدينا g متصلة و تزايدية قطعا على $]-\infty;0]$ و $g(]-\infty;0])=]-3;0]$

ومنه g تقابل من $]-\infty;0]$ الى $J=]-3;0]$

نحسب $g^{-1}(x)$ لكل x من J

لتكن $y\in]-\infty;0]$ و $x\in]-3;0]$

$$g^{-1}(x)=y \Leftrightarrow g(y)=x$$
$$\Leftrightarrow e^{y}-1-2\sqrt{1-e^{y}}=x$$
$$\Leftrightarrow 1-e^{y}+2\sqrt{1-e^{y}}+1=-x+1$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{1-e^{y}}+1\right)^{2}=-x+1$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{1-e^{y}}=\sqrt{-x+1}-1$$
$$\Leftrightarrow e^{y}=1-\left(\sqrt{-x+1}-1\right)^{2}$$
$$\Leftrightarrow y=\ln\left[1-\left(\sqrt{-x+1}-1\right)^{2}\right]$$

اذن $g^{-1}(x)=\ln\left[1-\left(\sqrt{-x+1}-1\right)^{2}\right] \qquad \forall x\in\left]-3;0\right]$

تمرين5

نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ $f(x)=2x+\dfrac{e^{x}}{e^{x}-1}$

1- حدد D_f و نهايات f عند محدات D_f
2- أدرس تغيرات f و أعط جدول تغيراتها
3- أدرس الفروع اللانهائية لمنحنى f
4- بين أن $A\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ مركز تماثل للمنحنى C_f
5- أنشئ C_f في مستوى منسوب إلى م.م.م
6- لتكن $m\in\mathbb{R}$
حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $2xe^{x}-(m-1)e^{x}-2x+m=0$

الحل

$$f(x)=2x+\frac{e^{x}}{e^{x}-1}$$

1- نحدد D_f

لتكن $x\in\mathbb{R}$

$$x\in D_f \Leftrightarrow e^{x}-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$$

إذن $D_f=\left]-\infty;0\right[\cup\left]0;+\infty\right[$

نحدد نهايات f عند محدات D_f

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x+\frac{e^{x}}{e^{x}-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x-\frac{1}{1-e^{-x}}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(2x+\frac{e^{x}}{e^{x}-1}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(2x+\frac{e^x}{e^x-1}\right) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(2x+\frac{e^x}{e^x-1}\right) = -\infty$$

-2 ندرس تغيرات f و نعطي جدول تغيراتها

$$\forall x\in\mathbb{R}^* \qquad f'(x) = 2-\frac{e^x}{\left(e^x-1\right)^2} = \frac{2e^{2x}-5e^x+2}{\left(e^x-1\right)^2}$$

ليكن Δ مميز $2X^2-5X+2$ لدينا $\Delta = 9$

ومنه جدرا $2X^2-5X+2$ هما $X_1 = 2$ و $X_2 = \frac{1}{2}$

$$2X^2-5X+2\geq 0 \Leftrightarrow X\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup[2;+\infty[$$

$$x\in\mathbb{R}^* \qquad 2e^{2x}-5e^x+2\geq 0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}^* \qquad e^x\in\left]0;\frac{1}{2}\right]\cup[2;+\infty[$$

$$\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-\ln 2\right]\cup\left[\ln 2;+\infty\right[$$

ومنه $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-\ln 2\right]\cup\left[\ln 2;+\infty\right[$

إذن f تزايدية على كل من $\left[\ln 2;+\infty\right[$ و $\left]-\infty,-\ln 2\right]$

f تناقصية على كل من $\left]0;\ln 2\right[$ و $\left]-\ln 2;0\right[$

جدول تغيرات f

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	||	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-1-2\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$2+2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

-3 ندرس الفروع اللانهائية لمنحنى f

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(2x+\frac{e^x}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}}\right)\right) = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-2x = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x-1} = 1$$

إذن المستقيم ذا المعادلة $y = 2x+1$ مقارب للمنحنى C_f

لدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-2x = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x-1} = 0$$

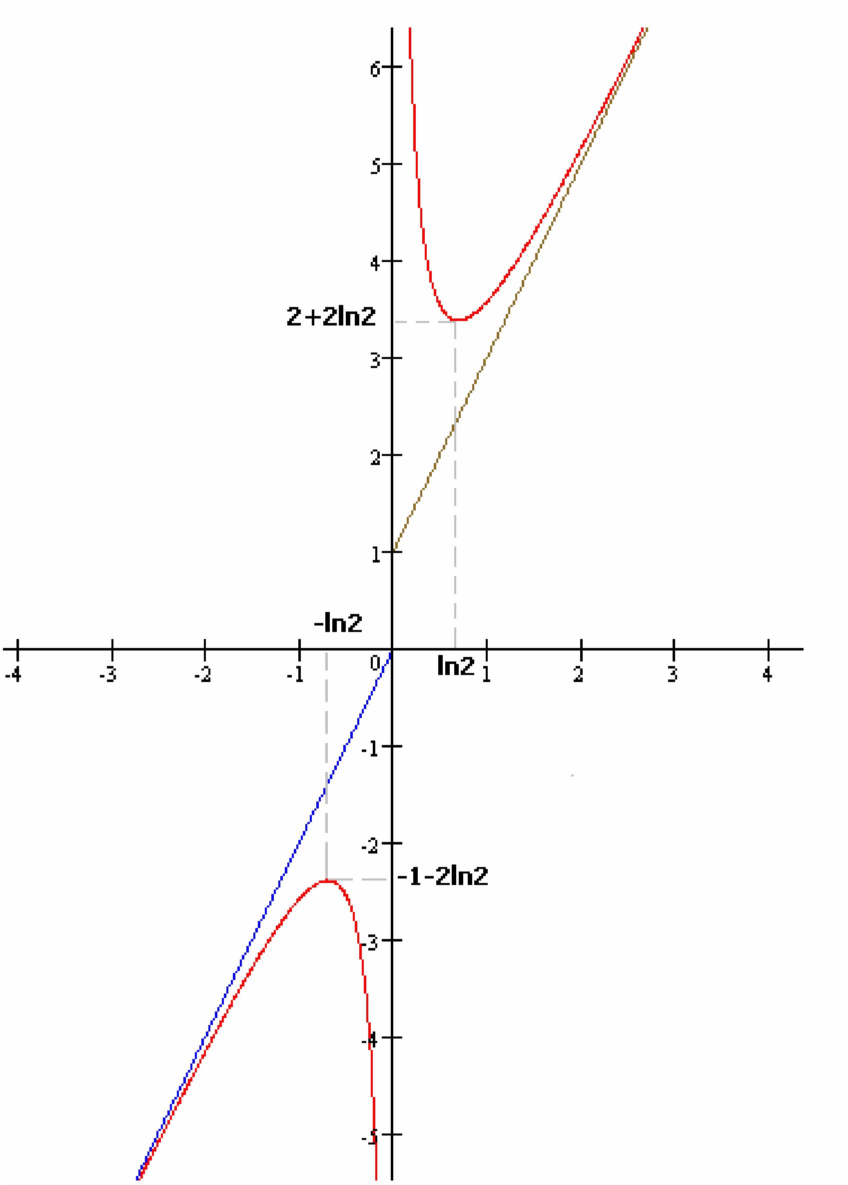
إذن المستقيم ذا المعادلة $y = 2x$ مقارب للمنحنى C_f

4- نبين أن $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ مركز تماثل للمنحنى C_f

$$f(-x)=-2x+\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}=-2x+\frac{1}{1+e^{x}} \quad \text{و} \quad 1-f(x)=1-2x-\frac{e^{x}}{e^{x}+1}=-2x+\frac{1}{1+e^{x}}$$

ومنه $f(-x)=1-f(x)$ إذن $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ مركز تماثل للمنحنى C_f

5- ننشئ C_f في مستوى منسوب إلى م.م.م



6- نحدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $2xe^{x}-(m-1)e^{x}-2x+m=0$

$$2xe^{x}-(m-1)e^{x}-2x+m=0 \Leftrightarrow m\left(1-e^{x}\right)=2x\left(1-e^{x}\right)-e^{x}$$

نلاحظ أن 0 ليس حلا للمعادلة مهما كانت m

ومنه $2xe^{x}-(m-1)e^{x}-2x+m=0 \Leftrightarrow m=2x+\frac{e^{x}}{e^{x}-1} \Leftrightarrow m=f(x)$

تحديد عدد حلول المعادلة $2xe^{x}-(m-1)e^{x}-2x+m=0$ يرجع الى تحديد عدد نقط تقاطع C_f و المستقيم ذا المعادلة $y=m$

مبيانيا لدينا :

إذا كان $m \in \left]-1-2\ln 2;2+2\ln 2\right[$ فان المعادلة $2xe^x-(m-1)e^x-2x+m=0$ لا تقبل حلا

إذا كان $m=2+2\ln 2$ أو $m=-1-2\ln 2$ فان المعادلة $2xe^x-(m-1)e^x-2x+m=0$ تقبل حلا وحيدا

إذا كان $m \in \left]-\infty;-1-2\ln 2\right[\cup \left]2+2\ln 2;+\infty\right[$ فان المعادلة $2xe^x-(m-1)e^x-2x+m=0$ تقبل حلين مختلفين

تمرين6

نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة ب

$$\begin{cases} f(x)=e^{x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)} & ; \quad x \succ 1 \\ f(x)=(1-x)\ln(1-x) & ; \quad x \prec 1 \\ f(1)=0 \end{cases}$$

1- حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$

2- أدرس الاشتقاق عند 1 و أول النتيجتين هندسيا

3- أحسب $f'(x)$ على كل من $\left]1;+\infty\right[$ و $\left]-\infty;1\right[$ و أعط جدول التغيرات

4- أدرس الفروع اللانهائية و أنشئ C_f

الحل

$$\begin{cases} f(x)=e^{x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)} & ; \quad x \succ 1 \\ f(x)=(1-x)\ln(1-x) & ; \quad x \prec 1 \\ f(1)=0 \end{cases}$$

1- نحدد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$

نضع $t=1-\dfrac{1}{x}$ أي $x=-\dfrac{1}{t-1}$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{t\to1^-} e^{-\frac{\ln(t)}{t-1}}=\dfrac{1}{e}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(1-x)\ln(1-x)=+\infty$$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} e^{x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}=0$ و $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)\ln(1-x)=0$

2- ندرس الاشتقاق عند 1 و نؤول النتيجتين هندسيا

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{e^{x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{e^{x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}}{e^{\ln(x-1)}}=\lim_{x\to1^+} e^{x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)-\ln(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1^+} e^{(x-1)\ln(x-1)-x\ln x}=1$$

f قابلة للاشتقاق على يمين 1 و المعامل الموجه للمماس على يمين 1 هو 1

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}-\ln(1-x)=+\infty$$

f غير قابلة للاشتقاق على يسار 1 و C_f يقبل مماس عمودي على يسار 1

3- نحسب $f'(x)$ على كل من $]1;+\infty[$ و $]-\infty;1[$ و نعطي جدول التغيرات

$$\forall x\in]1;+\infty[\quad f'(x)=\left(\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)+x\left(\frac{\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}\right)\right)e^{x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\left[\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x-1}\right]e^{x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$

نعتبر $\forall x\in]1;+\infty[\quad h(x)=\dfrac{1}{x-1}+\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$

$$\forall x\in]1;+\infty[\quad h'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x(x-1)}=\frac{-1}{x(x-1)^2}$$

ومنه h تناقصية على $]1;+\infty[$ و حيث $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$ فان $h(x)\le0\quad\forall x\in]1;+\infty[$

ومنه $f'(x)\le0\quad\forall x\in]1;+\infty[$ إذن f تناقصية على $]1;+\infty[$

* $\forall x\in]-\infty;1[\quad f'(x)=-1-\ln(1-x)$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow-1-\ln(1-x)=0\Leftrightarrow x=1-e^{-1}$$

ومنه $f'(x)\succ0\quad\forall x\in\left]1-e^{-1};1\right[$ و $f'(x)\le0\quad\forall x\in\left]-\infty;1-e^{-1}\right]$

إذن f تزايدية على $\left]1-e^{-1};1\right[$ و تناقصية على $\left]-\infty;1-e^{-1}\right]$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	$1-e^{-1}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+		+	
f	$+\infty$ ↘	$-e^{-1}$	↗	0		↗ e^{-1}

7- ندرس الفروع اللانهائية و ننشئ C_f

* لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{1}{e}$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $y=\dfrac{1}{e}$ مقارب للمنحنى C_f

* لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)==+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\ln(1-x)=-\infty$

ومنه C_f يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب

تمرين7

لتكن الدالة العددية f للمتغير الحقيقي المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases}f(x)=e^x\sqrt{1-e^{2x}} & ,\ x\le0\\ f(x)=e^{\frac{\ln x}{x}} & ,\ x\succ0\end{cases}$$

1. **أ/** بين أن $D_f=\mathbb{R}$ حيث D_f مجموعة تعريف الدالة f .
ب/ أحسب نهايات f عند محدات D_f . ثم أول النتائج هندسيا.
2. أ/ ادرس اتصال f عند $x_0=0$.
ب/ ادرس اشتقاق f عند $x_0=0$. ثم أول النتيجة هندسيا.
3. أ/ أثبت أن f' الدالة المشتقة للدالة f معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} f'(x)=\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}(1-2e^{2x}) & , x\prec 0 \\ f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}e^{\frac{\ln x}{x}} & , x\succ 0 \end{cases}$$

ب/ استنتج تغيرات الدالة f .و أنشئ جدول التغيرات.
4. اكتب معادلة المماس لـ C_f في النقطة $A(1,1)$.
5. أنشئ C_f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ بحيث $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$
6. لتكن g قصور الدالة f على المجال $I=\left[-\frac{1}{2}\ln 2\ ,\ 0\right]$
أ/ بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده
ب/أنشئ جدول تغيرات g^{-1} الدالة العكسية للدالة g
ج/حدد الصيغة $g^{-1}(x)$ لكل x من J

ملحوظة: نعتبر التقريبات التالية: $e\simeq 2.7$ $\quad e^{\frac{1}{e}}\simeq 1.4$ $\quad \ln 2\simeq 0.7$

الحل

$$\begin{cases} f(x)=e^x\sqrt{1-e^{2x}} & , x\le 0 \\ f(x)=e^{\frac{\ln x}{x}} & , x\succ 0 \end{cases}$$

1. **أ/** نبين أن $D_f=\mathbb{R}$

$1-e^{2x}\ge 0 \quad \forall x\le 0$ ومنه $f(x)\in\mathbb{R} \quad \forall x\le 0$ وبالتالي $]-\infty;0]\subset D_f$

$e^{\frac{\ln x}{x}}\in\mathbb{R} \quad \forall x\succ 0$ ومنه $]0,\infty[\subset D_f$ إذن $D_f=\mathbb{R}$

ب/ نحسب نهايات f عند محدات D_f . ثم نؤول النتائج هندسيا.

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^x\sqrt{1-e^{2x}}=0$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $y=0$ مقارب أفقي للمنحنى C_f

* لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}}=1$

ومنه المستقيم ذا المعادلة $y=1$ مقارب أفقي للمنحنى C_f

2. أ/ ندرس اتصال f عند $x_0=0$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} e^x\sqrt{1-e^{2x}}=0 \text{ و } \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}}=\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}\ln x}=0$$

ومنه $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$ اذن f متصلة في 0

ب/ ندرس اشتقاق f عند $x_0=0$. ثم نؤول النتيجة هندسيا.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x\sqrt{1-e^{2x}}}{x}=\lim_{x\to 0^-}-e^x\sqrt{\frac{1-e^x}{-x}}\sqrt{\frac{1+e^x}{-x}}=-\infty$$

f غير قابلة للاشتقاق في0 على اليسار و تقبل نصف مماس عمودي عند النقطة ذات الأفصول 0

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{\ln x}{x}}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{\ln x}{x}}}{e^{\ln x}}=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}(\ln x-x\ln x)}=0$$

f قابلة للاشتقاق في0 على اليمين و تقبل نصف مماس أفقي عند النقطة ذات الأفصول 0

3. **أ/** نثبت أن f' الدالة المشتقة للدالة f معرفة كما يلي:

$$f'(x)=\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}(1-2e^{2x})\quad ,x\prec 0\qquad\qquad f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}e^{\frac{\ln x}{x}}\quad ,x\succ 0$$

لدينا $f(x)=e^x\sqrt{1-e^{2x}}\quad \forall x\prec 0$

ومنه $$\forall x\prec 0\qquad f'(x)=e^x\sqrt{1-e^{2x}}+e^x\frac{-e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}=e^x\left(\frac{1-e^{2x}-e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}\right)=\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}(1-2e^{2x})$$

$f(x)=e^{\frac{\ln x}{x}}\quad \forall x\succ 0$ ومنه $$\forall x\succ 0\quad f'(x)=\left((\frac{\ln x}{x})'\right)e^{\frac{\ln x}{x}}=\frac{1-\ln x}{x^2}e^{\frac{\ln x}{x}}$$

ب/ نستنتج تغيرات الدالة f .و نعطي جدول التغيرات.

* على $]-\infty;0[$ اشارة $f'(x)$ هي اشارة $1-2e^{2x}$

$$1-2e^{2x}=0\Leftrightarrow e^{2x}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{-\ln 2}{2}$$

* على $]0;+\infty[$ اشارة $f'(x)$ هي اشارة $1-\ln x$

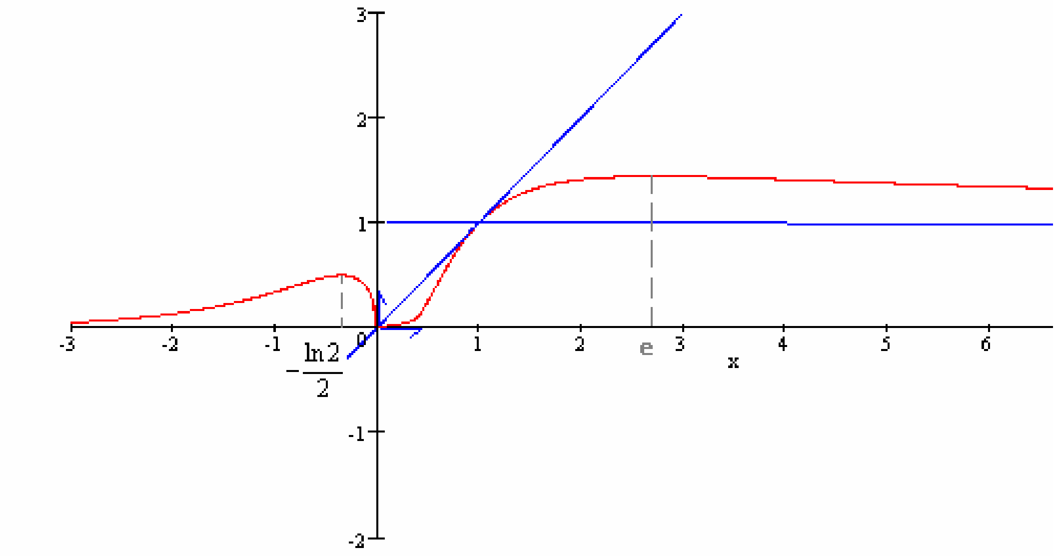
$$1-\ln x=0\Leftrightarrow x=e$$

x	$-\infty$		$-\frac{\ln 2}{2}$		0		e		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-		+	0	-	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$e^{\frac{1}{e}}$	$\searrow$	1

4. نكتب معادلة المماس لـ C_f في النقطة $A(1,1)$.

لدينا $f'(1)=1$ و $f(1)=1$ ومنه معادلة المماس لـ C_f في النقطة $A(1,1)$ هو المستقيم ذا المعادلة $y=x$

5. ننشئ C_f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$



6. لتكن g قصور الدالة f على المجال $I=\left[-\frac{1}{2}\ln 2\ ,\ 0\right]$

أ/ نبين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده

g متصلة على I وتناقصية قطعا على I و $g(I)=\left[0;\frac{1}{2}\right]$

ومنه g تقابل من I نحو مجال $J=\left[0;\frac{1}{2}\right]$

ب/ جدول تغيرات الدالة g^{-1}

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\frac{1}{2}$
g^{-1}	0 $\searrow$ $-\frac{\ln 2}{2}$

ج/ نحدد الصيغة $g^{-1}(x)$ لكل x من J

ليكن $x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$ و $y\in\left[-\frac{1}{2}\ln 2\ ,\ 0\right]$

$$g^{-1}(x)=y \Leftrightarrow g(y)=x \Leftrightarrow e^{y}\sqrt{1-e^{2y}}=x \Leftrightarrow e^{2y}\left(1-e^{2y}\right)=x$$

نضع $Y=e^{2y}$ و $Y\in\left[\frac{1}{2};1\right]$

$$g^{-1}(x)=y \Leftrightarrow Y^2-Y+x=0$$

$$\Leftrightarrow \left(Y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-x$$

$$\Leftrightarrow Y=\sqrt{\frac{1}{4}-x}+\frac{1}{2}$$

ومنه $g^{-1}(x)=y \Leftrightarrow e^{2y}=\sqrt{\frac{1}{4}-x}+\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{\frac{1}{4}-x}+\frac{1}{2}\right)$ إذن $g^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{\frac{1}{4}-x}+\frac{1}{2}\right)\qquad \forall x\in J$

تمرين8

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي حيث $f(x)=\dfrac{x^2-x+\ln(x-1)}{(x-1)^2}$

و ليكن C_f منحنى f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=2cm$

1- حدد D_f ثم النهايات عند محدات D_f

2- لتكـــن g دالة عددية لمتغير حقيقي حيث $g(x)=2-x-2\ln(x-1)$

أ) أدرس تغيرات الدالة g و أعط جدول تغيراتها

ب) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا هو 2

3- أ) أدرس تغيرات f

ب) أعط جدول قيم لدالة f ممثلا في صور الأعداد $\dfrac{3}{2}$; $\dfrac{11}{8}$; 3 ; 4 بالدالة f و قيم مقربة لهذه الصور

ج) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $\left]\dfrac{11}{8};\dfrac{3}{2}\right[$

4- أنشئ المنحنى C_f (نقبل أن النحنى C_f يقبل نقطة انعطاف أفصوله محصور بين 2 و3

ملاحظة: $\ln 2\simeq 0,69$; $\ln 3\simeq 1,09$

الحل $f(x)=\dfrac{x^2-x+\ln(x-1)}{(x-1)^2}$

1- نحدد D_f ثم النهايات عند محدات D_f

$x\in D_f \Leftrightarrow x-1\succ 0 \Leftrightarrow x\succ 1$ إذن $D_f=]1;+\infty[$

* $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-x+\ln(x-1)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{(x-1)^2}\left[x^2-x+\ln(x-1)\right]=-\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-x+\ln(x-1)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{2}\times\left[\dfrac{1}{(x-1)^2}\ln\dfrac{1}{(x-1)^2}\right]=1$

-2 $g(x)=2-x-2\ln(x-1)$

أ) ندرس تغيرات الدالة g و نعطي جدول تغيراتها

$D_g=]1;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left[2-x-2\ln(x-1)\right]=-\infty$ $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left[2-x-2\ln(x-1)\right]=+\infty$

$g'(x)=-1-\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{-x-1}{x-1}$ $\forall x\in]1;+\infty[$

x	1 $+\infty$
$g'(x)$	-
g	$+\infty$ ↘ $-\infty$

ب) نبين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا هو 2

لدينا g متصلة و تزايديا قطعا على $]1;+\infty[$ و $g(2)=0$ اذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا هو 2

3- أ) ندرس تغيرات f

$$\forall x \in]1;+\infty[\qquad f'(x)=\frac{\left(2x-1+\frac{1}{x-1}\right)(x-1)^2-2(x-1)\left(x^2-x+\ln(x-1)\right)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{2x^2-3x+2-2x^2+2x-2\ln(x-1)}{(x-1)^3}=\frac{-x+2-2\ln(x-1)}{(x-1)^3}$$

إذن $\forall x \in]1;+\infty[\qquad f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x-1)^3}$

من 2 أ) و ب) نستنتج أن $f'(x)\succ 0$ $\forall x \in]1;2[$ و $f'(x)\prec 0$ $\forall x \in [2;+\infty[$

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
f	$-\infty$	↗	2	↘	1

ب) جدول قيم لدالة f لبعض الأعداد $\frac{3}{2}$; $\frac{11}{8}$; 3 ; 4 بالدالة f و قيم

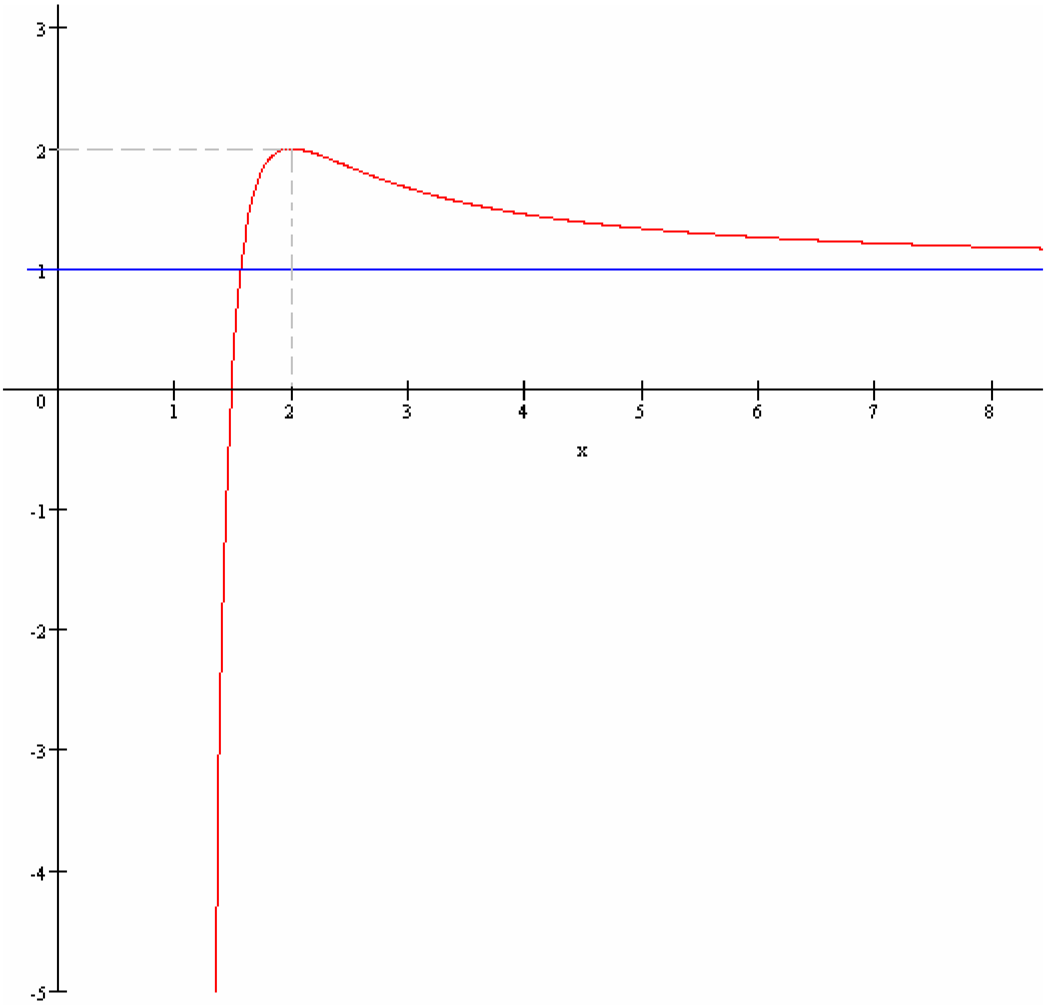
x	4	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{8}$
$f(x)$	$\frac{12+\ln 3}{9}$	$\frac{6+\ln 2}{4}$	$3-4\ln 2$	$\frac{33+64\ln\frac{3}{8}}{9}$
$\approx f(x)$	$1,45$	$1,67$	$0,23$	$-3,31$

ج) نبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $\left]\frac{11}{8};\frac{3}{2}\right[$

لدينا f متصلة على و تزايدية قطعا على $\left]\frac{11}{8};\frac{3}{2}\right[$ و $f\left(\frac{11}{8}\right)\times f\left(\frac{3}{2}\right)\prec 0$

ومنه المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $\left]\frac{11}{8};\frac{3}{2}\right[$

4- ننشئ المنحنى C_f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=2cm$



تمرين9

A) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\ln(x+1)-\ln x-\dfrac{1}{x+1}+1$

-1 بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$

-2 بين أن $g'(x)=\dfrac{-1}{x(x+1)^2}$ لكل x من $]0;+\infty[$ و استنتج منحى تغيرات g على $]0;+\infty[$

-3 استنتج أن $g(x)\succ 0 \quad \forall x\in]0;+\infty[$

B) لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $\begin{cases} f(x)=x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)+x+1 & ;x\succ 0 \\ f(x)=(1-x)e^{x} & ;x\leq 0 \end{cases}$

و (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$

-1 أ/ بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=1$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب/ حدد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و أول النتيجة هندسيا

ج/ بين أن f متصلة في 0 .

2- أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين في 0 و على اليسار في 0 ثم أول النتيجتين هندسيا.

3- أ/ بين أن $f'(x)=g(x)\quad \forall x\in\left]0;+\infty\right[$ و أن $f'(x)=-xe^{x}\quad \forall x\in\left]-\infty;0\right[$

ب/ أعط جدول تغيرات f .

4- بين أن النقطة A ذات الافصول 1- نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

5- بين أن المستقيم ذا المعادلة $y=x+2$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

6- أنشئ المنحنى (C_f).

$\ln 2\approx 0,7 \qquad \ln 3\approx 1,1 \qquad e^{-1}\approx 0,37 \qquad e^{-2}\approx 0,14 \qquad e^{-3}\approx 0,05$

الحل

A) g الدالة العددية المعرفة على $\left]0;+\infty\right[$ بـ: $g(x)=\ln(x+1)-\ln x-\dfrac{1}{x+1}+1$

4- نبين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x+1}+1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{x+1}+1\right)=1$$

5- نبين أن $g'(x)=\dfrac{-1}{x(x+1)^2}$ لكل x من $\left]0;+\infty\right[$ و نستنتج منحى تغيرات g على $\left]0;+\infty\right[$

ليكن x من $\left]0;+\infty\right[$ $\qquad g(x)=\ln(x+1)-\ln x-\dfrac{1}{x+1}+1$

و منه

$$g'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x(x+1)-(x+1)^2+x}{x(x+1)^2}=\frac{x^2+x-x^2-2x-1+x}{x(x+1)^2}=\frac{-1}{x(x+1)^2}$$

$\dfrac{-1}{x(x+1)^2}\prec 0\quad \forall x\in\left]0;+\infty\right[$ أي $g'(x)\prec 0\quad \forall x\in\left]0;+\infty\right[$

اذن g تناقصية قطعا على $\left]0;+\infty\right[$

6- نستنتج أن $g(x)\succ 0\quad \forall x\in\left]0;+\infty\right[$

لدينا g تناقصية قطعا على $\left]0;+\infty\right[$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$

اذن $g(x)\succ 0\quad \forall x\in\left]0;+\infty\right[$

B) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{cases} f(x)=x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)+x+1 & ;x\succ 0\\[2ex] f(x)=(1-x)e^{x} & ;x\le 0\end{cases}$$

1- أ/ نبين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=1$ ثم نستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

نضع $x=\dfrac{1}{t}$ ومنه $t=\dfrac{1}{x}$ و بالتالي $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(t+1)}{t}=1$

و منه $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x + 1 = +\infty$

ب/ نحدد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ونؤول النتيجة هندسيا

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (1-x)e^x = \lim_{x\to-\infty} e^x - xe^x = 0$$

و منه محور الافاصيل مقارب للمنحنى (C_f)

ج/ نبين أن f متصلة في 0 .

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x + 1 = \lim_{x\to0^+} x\ln(x+1) - x\ln(x) + x + 1 = 1$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} (1-x)e^x = 1$$

ومنه $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^-} f(x) = f(0)$ اذن f متصلة في 0 .

-2 ندرس قابلية اشتقاق f على اليمين في 0 و على اليسار في 0 ثم نؤول النتيجتين هندسيا.

$$\lim_{x\to0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0^-} \frac{(1-x)e^x - 1}{x} = \lim_{x\to0^-} \frac{e^x-1}{x} - e^x = 1 - 1 = 0$$

و منه f قابلية اشتقاق على اليسار في 0 و تقبل نصف مماس أفقي على يسار في 0

$$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x}{x} = \lim_{x\to0^+} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + 1 = +\infty$$

و منه f غير قابلية الاشتقاق على اليمين في 0 و تقبل نصف مماس عمودي على يمين في 0

-3 أ/ نبين أن $f'(x) = g(x)$ $\forall x \in]0;+\infty[$ و أن $f'(x) = -xe^x$ $\forall x \in]-\infty;0[$

ليكن $x \in]0;+\infty[$ $f(x) = x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x + 1$

$$f'(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x\frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} + 1 = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1} + 1 = g(x)$$

ليكن $x \in]-\infty;0[$ $f(x) = (1-x)e^x$

$$f'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x$$

ب/ نعطي جدول تغيرات f .

x	$+\infty$ 0 $-\infty$	
$f'(x)$	+	+
$f(x)$	0 ↗ $+\infty$	

-4 نبين أن النقطة A ذات الافصول -1 نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

ليكن $x \in]-\infty;0[$ $f'(x) = -xe^x$

$$f''(x) = -e^x - xe^x = -(x+1)e^x$$

$$f''(x) \Leftrightarrow -(x+1)e^x = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

x	0	-1	$-\infty$
$f''(x)$	+	0	-

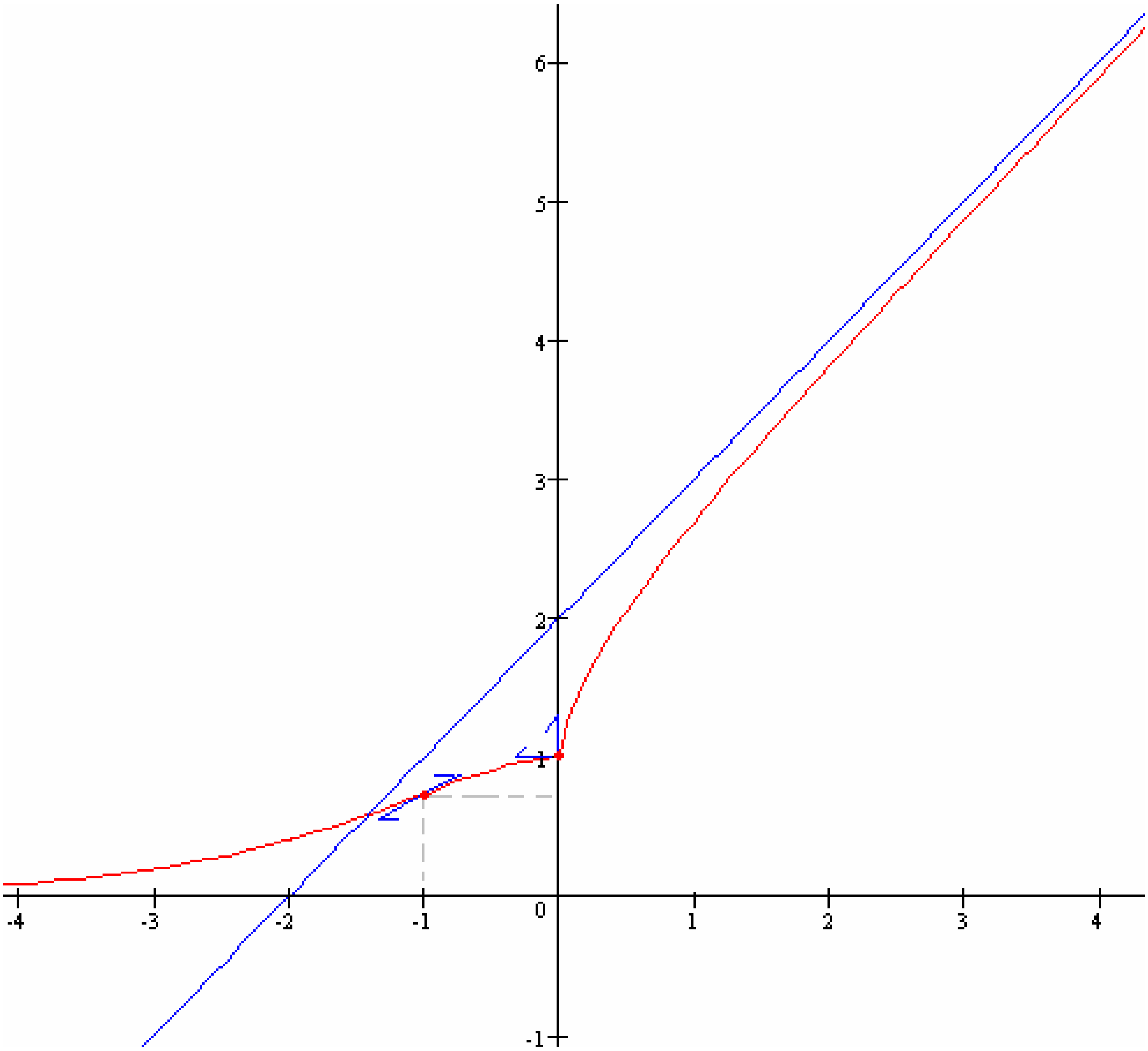
اذن النقطة A ذات الافصول -1 نقطة انعطاف للمنحنى $\left(C_f\right)$

-5 نبين أن المستقيم ذا المعادلة $y = x+2$ مقارب للمنحنى $\left(C_f\right)$ بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x+2) = \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-1 = 1-1 = 0$$

اذن المستقيم ذا المعادلة $y = x+2$ مقارب للمنحنى $\left(C_f\right)$ بجوار $+\infty$.

-6 ننشئ المنحنى $\left(C_f\right)$.



تمرين1

نعتبر الدالة العددية f لمتغير حقيقي المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} f(x)=\left|\frac{x+1}{x}\right|^x & ;x\in\mathbb{R}^*-\{-1\} \\ f(0)=1 \end{cases}$$

1- حدد D_f مجموعة تعريف f ثم حدد نهايات f عند محدات D_f

2- أدرس اتصال و قابلية اشتقاق f على $\mathbb{R}^*-\{-1\}$

3- أدرس اتصال و قابلية اشتقاق f في 0

4- نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي المعرف بـ: $g(x)=-\frac{1}{x+1}+\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|$

أ- حدد D_g مجموعة تعريف g ثم حدد نهايات g عند محدات D_g

ب- أدرس تغيرات g

ج- استنتج أن $g(x)\succ 0$ $\forall x\in]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$ و أنه $g(\alpha)=0$ $\exists!\alpha\in]-1;0[$

5- أدرس تغيرات f

6- أنشئ (C_f) في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

نقبل أن $-0,3\prec\alpha\prec-0,2$ و أن $f(\alpha)\simeq 0,7$

الحل

$$\begin{cases} f(x)=\left|\frac{x+1}{x}\right|^x & ;x\in\mathbb{R}^*-\{-1\} \\ f(0)=1 \end{cases}$$

5- نحدد D_f و نهايات f عند محدات D_f

$$D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$$

$$\lim_{x\to-1} f(x)=\lim_{x\to-1}\left|\frac{x+1}{x}\right|^x=\lim_{x\to-1} e^{x\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{x+1}{x}\right|^x=\lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\frac{x+1}{x}}=\lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{t\to0} e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}=e \qquad \left[t=\frac{1}{x}\right]$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left|\frac{x+1}{x}\right|^x=\lim_{x\to-\infty} e^{x\ln\frac{x+1}{x}}=\lim_{x\to-\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{t\to0} e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}=e \qquad \left[t=\frac{1}{x}\right]$$

6- ندرس اتصال و قابلية اشتقاق f على $\mathbb{R}^*-\{-1\}$

$\forall x\in]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[\quad f(x)=e^{x\ln\frac{x+1}{x}}$ و $\forall x\in]-1;0[\quad f(x)=e^{x\ln\left(-\frac{x+1}{x}\right)}$

f متصلة و قابلة للاشتقاق في كل نقطة من $\mathbb{R}^*-\{-1\}$ (مركب دوال متصلة و قابلة للاشتقاق)

$$\forall x\in\mathbb{R}^*-\{-1\} \qquad f'(x)=\left[-\frac{1}{x+1}+\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|\right]e^{x\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|}$$

7- ندرس اتصال و قابلية اشتقاق f في 0

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left|\frac{x+1}{x}\right|^{x}=\lim_{x\to 0} e^{x\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|}=\lim_{x\to 0} e^{x\ln|x+1|-x\ln|x|}=1=f(0)$$

f متصل في 0

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^{x\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|}-1}{x\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|}\right]\times\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|=+\infty$$

$$car\quad\left[\lim_{x\to 0} x\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|=0\right]$$

f غير قابلة للاشتقاق في 0 و $\left(C_f\right)$ يقبل مماس عمودي في 0النقطة التي أفصولها 0

-4 $$g(x)=-\frac{1}{x+1}+\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|$$

أ- نحدد D_g و نهايات g عند محدات D_g

$$D_g=\mathbb{R}^*-\{-1\}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left[-\frac{1}{x+1}+\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|\right]=0$$

$$\lim_{x\to -1^-} g(x)=\lim_{x\to -1^-}\left[-\frac{1}{x+1}+\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|\right]=\lim_{x\to -1^-}\left[\frac{1}{x+1}\left(-1+(x+1)\ln\left(|x+1|\right)-(x+1)\ln|x|\right)\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} g(x)=\lim_{x\to -1^+}\left[-\frac{1}{x+1}+\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|\right]=\lim_{x\to -1^+}\left[\frac{1}{x+1}\left(-1+(x+1)\ln\left(|x+1|\right)-(x+1)\ln|x|\right)\right]=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{x+1}+\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|\right]=+\infty$$

ب- ندرس تغيرات g

$$\forall x\in\mathbb{R}^*-\{-1\}\qquad g'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x(x+1)}=\frac{-1}{x(x+1)^2}$$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		+	||	+	||	-	
$g(x)$	0 ↗		$+\infty$ || $-\infty$	↗	$+\infty$ || $+\infty$	↘	0

ج- نستنتج أن $g(x)\succ 0$ $\forall x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]0;+\infty\right[$ و أنه $g(\alpha)=0$ $\exists!\alpha\in\left]-1;0\right[$

من حلال جدول التغيرات يتضح أن $g(x)\succ 0$ $\forall x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]0;+\infty\right[$

لدينا g متصلة و تزايدية قطعا على $\left]-1;0\right[$ و $g\left(\left]-1;0\right[\right)=\mathbb{R}$

ومنه g تقابل من $\left]-1;0\right[$ نحو $\mathbb{R}$ ومنه $g(\alpha)=0$ $\exists!\alpha\in\left]-1;0\right[$

-5 ندرس تغيرات f

$$\forall x\in\mathbb{R}^*-\{-1\}\qquad f'(x)=\left[-\frac{1}{x+1}+\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|\right]e^{x\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|}=g(x)e^{x\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|}$$

اشارة $f'(x)$ هي اشارة $g(x)$

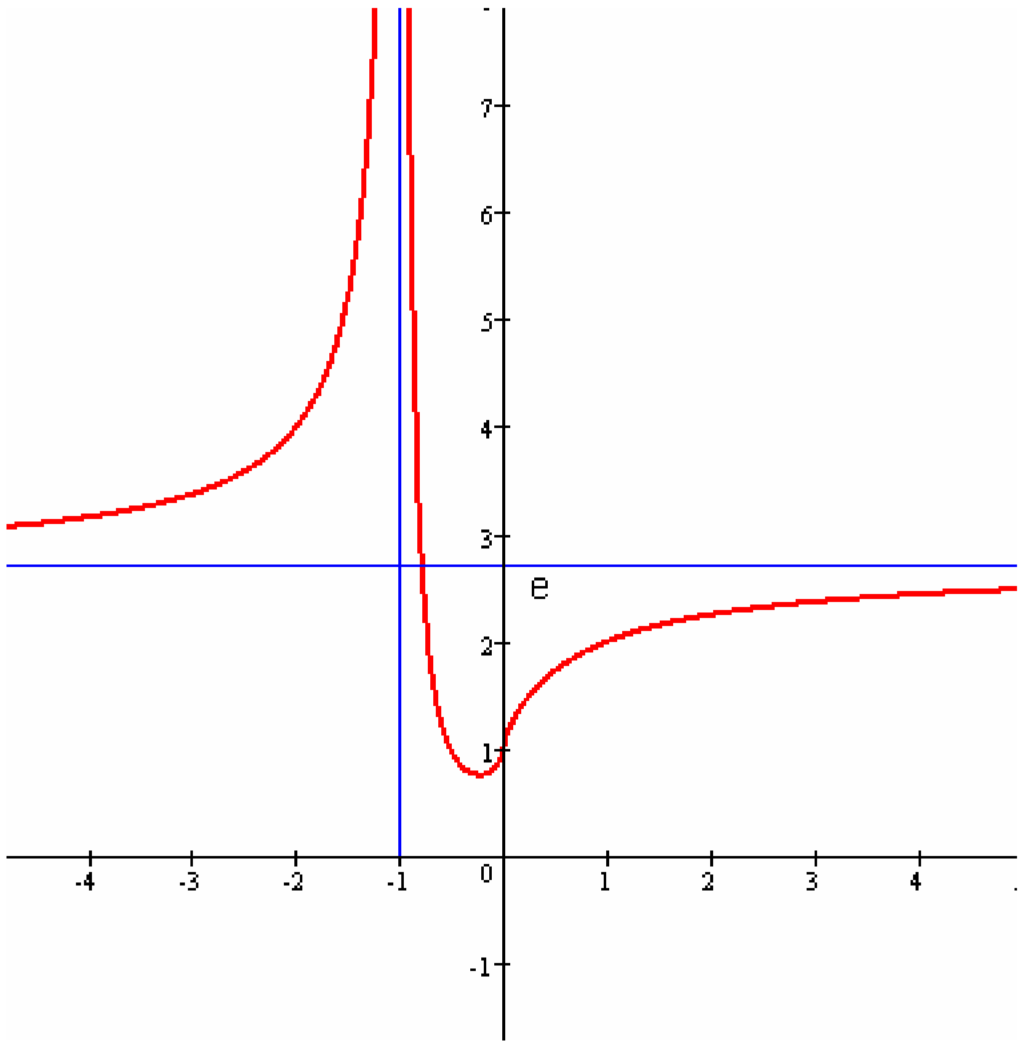
x	$-\infty$		-1		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	e	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	e

6- ننشئ (C_f) في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

$-0,3 \prec \alpha \prec -0,2$ و $f(\alpha) \simeq 0,7$

(C_f) يقبل مماس عمودي عند النقطة التي أفصولها 0 و مماس أفقي عند α و مقاربان معادلتهما

$y = e$ و $x = -1$



تمارين

تمرين1

أحسب $\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{x}$ $\qquad$ $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}$

تمرين2

أدرس و مثل مبيانيا الدالة f حيث $\begin{cases} f(x)=x^{2x} \\ f(0)=1 \end{cases}$

تمرين3

1- حل في $\mathbb{R}$ المعادلات $e^{4x-3}=2$; $e^{x^2-3x-3}=e$ $\qquad$ $3e^{3x}-2e^{2x}-e^{x}=0$

2- حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات

$$3^{2x}-3^{x}-6\succ 0 \qquad e^{x}-2e^{-x}+1\succ 0 \quad ; \quad 2e^{2x}-3e^{x}+1\prec 0$$

3- حل في $\mathbb{R}^2$ النظمة $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2^{x}=3^{y} \end{cases}$

تمرين4

أحسب

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}+2}{e^{x}-1} \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}x^2e^{x} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}+1}{x^3} \qquad \lim_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{e^{2x}-3e^{x}+2} \quad ; \quad \lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-e^{x}}{x}$$

$$\lim_{x\to0^+}x^{\sqrt{x}} \qquad \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}^{x}-1}{x-1}$$

تمرين5

I- نعتبر الدالة العددية f لمتغير حقيقي المعرفة بما يلي $f(x)=2e^{2x}-3e^{x}+1$

1-أ- حدد D_f ونهايات f عند محدات D_f

ب- أدرس تغيرات f

2- أ- حدد نقطة تقاطع C_f و محور الأفاصيل

ب- حدد معادلة المماس لـ C_f عند النقطة ذات الأفصول 0

ج- أدرس الفروع اللانهائية لـ C_f

د- أنشئ C_f

II- نعتبر الدالة g المعرفة بـ $g(x)=\ln\left(2e-3e+1\right)$

1- أ- حدد D_g و نهايات g عند محدات D_g

ب- أدرس تغيرات g

2- أدرس الفروع اللانهائية لـ C_g ثم أنشئ C_g

تمرين6

نعتبر الدالة العددية f لمتغير حقيقي المعرفة بما يلي $\begin{cases} f(x)=\left|2x(1-\ln x)\right| & x\succ 0 \\ f(x)=e-1-2\sqrt{1-e} & x\leq 0 \end{cases}$

1- أدرس اشتقاق و اتصال f عند النقطتين 0 و e
و أعط التأويل الهندسي للنتائج المحصل عليها

2- أحسب نهايات f عند محدات D_f ثم أدرس الفروع للانهائية لـ C_f

3- أدرس تغيرات f و أنشئ C_f $\quad \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$

4- بين أن g قصور الدالة f على $]-\infty;0]$ تقابل من $]-\infty;0]$ نحو مجال J يجيب تحديده

أحسب $g^{-1}(x)$ لكل x من J

تمرين7

I- نعتبر الدالة f المعرفة على $D = [0;1[\cup]1;+\infty[$ بحيث $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-1} + \ln\left|x^2-1\right|$

1- أحسب نهايات f عند محدات D.

2- بين أن $f'(x) = \dfrac{2x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$ لكل x من D و أعط جدول تغيرات f

3 - استنتج مما سبق إشارة $f(x)$ لكل x من D

II- لتكن g الدالة المعرفة على D بـ $\quad g(x) = x\ln|x-1|$

1- أ- أحسب نهايات g عند محدات D.

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x}$ و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

2- بين لكل x من D $\quad g'(x) = f(x)$ و أعط جدول تغيرات g.

3- أ- استنتج من دراسة الدالة f إحداثيتي I نقطة انعطاف المنحنى C_g

ب- حل في D المعادلة $g(x) = 0$

ج- أنشئ C_g

تمرين8

الجزء الأول

لتكن f الدالة المعرفة بـ $\quad f(x) = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)e^{2x} - 4(x-1)e^x - 2$

1- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و بين لكل x من $\mathbb{R}$ $\quad f(x) = xe^{2x}\left(1 - \dfrac{1}{2x} - \dfrac{4}{e^x} + \dfrac{4}{xe^x} - \dfrac{2}{xe^{2x}}\right)$

ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2- أدرس تغيرات f

3- أ- أدرس الفروع اللانهائية لـ C_f

ب- بين أن C_f يقطع محور الأفاصيل في نقطة x_0 تنتمي إلى $[-2;-1]$

$\left(e^4 \simeq \dfrac{225}{4};\quad e^2 \simeq \dfrac{15}{2};\quad e \simeq \dfrac{11}{4}\right)$

ج- أنشئ C_f $\quad \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$

الجزء الثاني

لتكن g الدالة المعرفة بـ

$$\begin{cases} g(x) = \left(x^2 - 4x\right)\ln x - \dfrac{1}{2}\left(x^2 - 8x + 4\right) & x \succ 0 \\ g(0) = -2 \end{cases}$$

1- بين أن $g(x) = f(\ln x)$ $\quad \forall x \in]0;+\infty[$

2- أدرس اتصال و اشتقاق g في يمين 0

3- أدرس تغيرات g

4- أ- أدرس الفروع اللانهائية لـ C_g

ب- أستنتج من 2- ب- في الجزء الأول , تأطيرا لأفصول نقطة تقاطع C_g ومحور الأفاصيل

ج- حدد نصف المماس لـ C_g في النقطة ذات الأفصول 0 ثم أنشئ C_g