تحليلية الجداء السلمي وتطبيقاته

I- الجداء السلمي (تذكير و إضافات)

1- أنشطة

1- نعتبر في المستوى المنسوب إلى المعلم متعامد ممنظم النقط $A(1;-2)$; $B(3;2)$; $C(-1;-3)$

أحسب AB ; $\|3\overrightarrow{AC}\|$; $\|-2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}\|$

2- نعتبر في المستوى المنسوب إلى المعلم متعامد ممنظم المستقيمين

$(D): x+2y-4=0$; $(\Delta): 2x-y-3=0$

أ- حدد إحداثيتي النقطة A ، تقاطع (D) و (Δ)

ب- تأكد أن $B(-2;3)\in(D)$ و $C(1;-1)\in(\Delta)$

قارن AB^2+AC^2 و BC^2

أحسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

ماذا تستنتج

3- A و B نقطتان مختلفتان من المستوى (P)، α قياس الزاوية $[\widehat{AOB}]$ و $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$; $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$

a) أحسب $\vec{u}\cdot\vec{v}$ في الحالتين التاليتين

$\|\vec{u}\|=6$; $\|\vec{v}\|=5$; $\alpha=\frac{\pi}{3}$

$\|\vec{u}\|=\sqrt{3}$; $\|\vec{v}\|=5$; $\alpha=\frac{5\pi}{6}$

b) حدد α في الحالتين التاليتين

$\|\vec{u}\|=3$; $\|\vec{v}\|=4$; $\vec{u}\cdot\vec{v}=6\sqrt{2}$

$\|\vec{u}\|=3$; $\|\vec{v}\|=4$; $\vec{u}\cdot\vec{v}=-6$

4- لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين حيث $\vec{u}^2=3$; $\vec{v}^2=5$ و $\vec{u}\cdot\vec{v}=-2$

أحسب $(3\vec{u}-\vec{v})\cdot(2\vec{u}+\vec{v})$

2- تعاريف

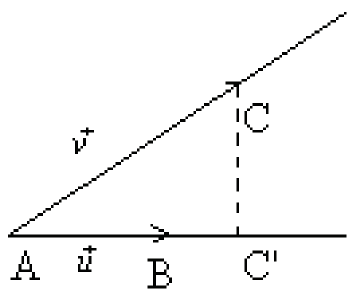
أ- الجداء السلمي لمتجهتين

a) تعريف

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين . نعتبر A و B و C ثلاث نقط من المستوى حيث $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$; $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ و C' المسقط العمودي لـ C على (AB)

الجداء السلمي للمتجهتين الغير المنعدمتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي $\vec{u}\cdot\vec{v}$ بحيث

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC'$



b) لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين و θ القياس الرئيسي للزاوية $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ و O نقطة من المستوى ، توجد نقطتان وحيدتان حيث $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$; $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$

بما أن $-\pi \prec \theta \leq \pi$ فان $|\theta|$ هو قياس للزاوية الهندسية $\left[\widehat{AOB}\right]$

ومنه $\vec{u}\cdot\vec{v} = OA \times OB \cos\left[\widehat{AOB}\right]$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos|\theta|$

إذن $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$ لأن $\cos\theta = \cos(-\theta)$

ليكن α قياس للزاوية الموجهة $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$

ومنه $\theta \equiv \alpha \quad [2\pi]$ و بالتالي $\cos\theta = \cos\alpha$

إذن $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\alpha$

تعريف

الجداء السلمي للمتجهتين الغير المنعدمتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي $\vec{u}\cdot\vec{v}$ بحيث $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\alpha$

α قياس للزاوية الموجهة $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$.

ملاحظة

-* إذا كانت $\vec{u}$ أو $\vec{v}$ منعدمة فان $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

-* إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير منعدمتين فان $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$

تمرين أحسب $\vec{u}\cdot\vec{v}$ حيث $\dfrac{-89\pi}{6}$ أحد قياسات الزاوية الموجهة $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$ و $\|\vec{u}\| = 3 \quad ; \quad \|\vec{v}\| = 4$

ب – خاصيات

مهما كانت المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ و العدد الحقيقي α

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$$
$$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$$
$$\vec{w}\cdot\left(\vec{u}+\vec{v}\right) = \vec{w}\cdot\vec{u} + \vec{w}\cdot\vec{v}$$
$$\left(\alpha\vec{u}\right)\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\left(\alpha\vec{v}\right) = \alpha\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$$

ج- تعامد متجهتين

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

II- صيغ تحليلية

1- الصيغة التحليلية للجداء السلمي

خاصية

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

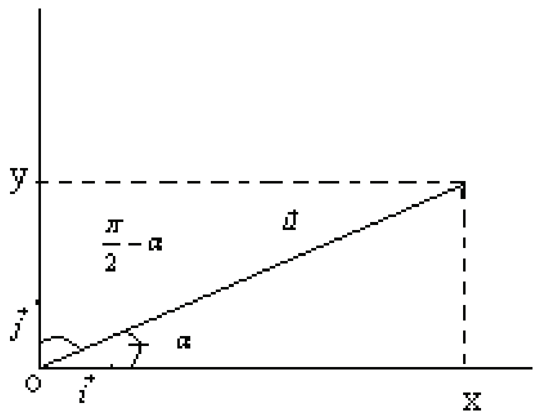
إذا كانت $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ و $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ فان $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$

ملاحظة إذا كان $\vec{u}(x;y)$ بالنسبة لأساس متعامد ممنظم $(\vec{i};\vec{j})$ فان $\vec{u}\cdot\vec{i} = x \quad ; \quad \vec{u}\cdot\vec{j} = y$

أمثلة أحسب $\vec{u}\cdot\vec{v}$ في الحالات..................

2- إحداثيتا متجهة في أساس متعامد ممنظم مباشر

ليكن $\vec{u}(x;y)$ بالنسبة لمعلم متعامد ممنظم مباشر $(o;\vec{i};\vec{j})$ و α قياس $\left(\widehat{\vec{i};\vec{u}}\right)$



لدينا $x = \vec{u}\cdot\vec{i}$; $y = \vec{u}\cdot\vec{j}$

ومنه $x = \|\vec{u}\|\|\vec{i}\|\cos\alpha$ $\quad$ $y = \|\vec{u}\|\|\vec{j}\|\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)$

إذن $x = \|\vec{u}\|\cos\alpha$ $\quad$ $y = \|\vec{u}\|\sin\alpha$

خاصية

إذا كان $(x;y)$ زوج إحداثيتي متجهة غير منعدمة $\vec{u}$ بالنسبة لأساس متعامد ممنظم مباشر $(\vec{i};\vec{j})$ و α قياس $(\widehat{\vec{i};\vec{u}})$ فان $\vec{u} = \|\vec{u}\|(\cos\alpha\vec{i} + \sin\alpha\vec{j})$

حالة خاصة

إذا كانت $\vec{u}$ متجهة واحدية (أي $\|\vec{u}\| = 1$) فان $\vec{u} = \cos\alpha\vec{i} + \sin\alpha\vec{j}$

3- الصيغة التحليلية لمنظم متجهة و لمسافة نقطتين

* إذا كان $(x;y)$ زوج إحداثيتي $\vec{u}$ بالنسبة لأساس متعامد ممنظم $(\vec{i};\vec{j})$ فان $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

* إذا كان $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ بالنسبة لمعلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ فان

$$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

4- الشرط التحليلي لتعامد متجهتين

خاصية

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان حيث $\vec{u} = x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{v} = x'\vec{i}+y'\vec{j}$

$$\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow xx'+yy' = 0$$

تمرين

حدد المتجهات الواحدية و المتعامدة مع $\vec{u}(-1;2)$

$$\begin{cases}\vec{u}\perp\vec{v}\\ \|\vec{v}\| = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-x+2y = 0\\ x^2+y^2 = 1\end{cases}$$ ....

تمرين نعتبر $A(1;3)$ $B(3;1)$ $C(-3;-1)$

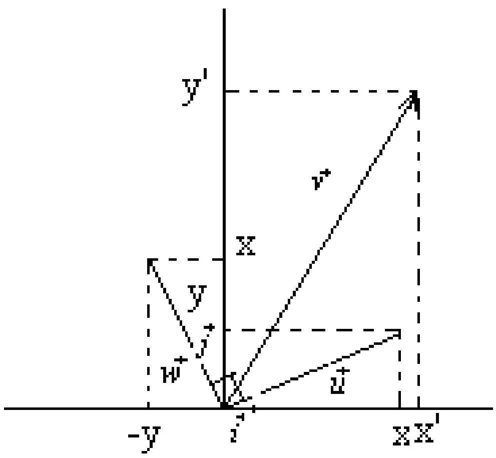
بين أن ABC قائم الزاوية في A

5- حساب $\cos\theta$ و $\sin\theta$

* المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

إذا كانت $\vec{u} = x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{v} = x'\vec{i}+y'\vec{j}$ وθ قياس $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ فان $\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$

* نعتبر المتجهة $\vec{w}$ بحيث $\overline{(\vec{u};\vec{w})} = \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ $\quad \|\vec{u}\| = \|\vec{w}\|$



لدينا باستعمال علاقة شال $\overline{(\vec{v};\vec{w})} = \overline{(\vec{u};\vec{w})} - \overline{(\vec{u};\vec{v})}$

$$\overline{(\vec{v};\vec{w})} = \frac{\pi}{2} - \theta$$

نعلم أن $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

$$\sin\theta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|\|\vec{v}\|}$$

لدينا $\vec{v}\cdot\vec{w} = xy' - yx' = \det(\vec{u};\vec{v})$

إذن $\sin\theta = \frac{\det(\vec{u};\vec{v})}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{xy' - x'y}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$

تمرين

ليكن θ القياس الرئيسي للزاوية $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ حيث $\vec{u}(-\sqrt{3};-3)$ و $\vec{v}(-1;\sqrt{3})$. حدد θ.

III- معادلة مستقيم معرف بمتجهة منظمية

1- متجهة منظمية

تعريف (D) مستقيم في المستوى، كل متجهة غير منعدمة عمودية على متجهة موجهة للمستقيم (D) تسمى متجهة منظمية على المستقيم (D).

2- خاصيات

* إذا كانت $\vec{n}$ منظمية على (D) فان كل متجهة $k\vec{n}$ ، $(k\in\mathbb{R}^*)$ منظمية عليه.

* إذا كانت $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ متجهتين منظميتين على مستقيم (D) فانهما تكونان مستقيميتين .

* اذا كانت $\vec{u}(a;b)$ موجهة ل (D) فان المتجهة $\vec{n}(-b;a)$ منظمية عليه.

2- معادلة مستقيم معرف بنقطة ومتجهة منظمية عليه

$\vec{n}(a;b)$ متجهة غير منعدمة و $A(x_0;y_0)$ نقطة من المستوى لتكن M نقطة

$\overrightarrow{AM}\perp\vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}(-b;a)$ مستقيميتان

$\Leftrightarrow$ M تنتمي إلى المستقيم المار من A و الموجه بالمتجهة $\vec{u}(-b;a)$.

إذن مجموعة النقط M من المستوى التي تحقق $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$ هي المستقيم المار من A و الموجه ب $\vec{u}(-b;a)$

معادلته ستكون على شكل $ax+by+c=0$

خاصية

لتكن $\vec{n}(a;b)$ متجهة غير منعدمة و $A(x_0;y_0)$ نقطة من المستوى.

مجموعة النقط M من المستوى التي تحقق $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$ هي المستقيم المار من A و الموجه ب $\vec{u}(-b;a)$

خاصية

إذا كانت $\vec{n}(a;b)$ منظمية على (D) فان معادلة (D) على شكل $ax+by+c=0$

إذا كان $(D):\ ax+by+c=0$ فان $\vec{n}(a;b)$ منظمية على (D)

تمرين

1- حدد متجهة منظمية لكل مستقيم من المستقيمات التالية

$$(D_1)3x-2y+1=0 \quad ; \quad (D_2):2y-1=0$$

$$(D_3):x-3=0$$

2- حدد المستقيم المار من $A(-1;3)$ و $\vec{n}(4;3)$ منظمية عليه

تمرين

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر $A(2;1)$ و $B(0;1)$ و $C(-2;3)$ و $\vec{u}(-2;5)$

1- حدد معادلة للمستقيم (D) المار من A و $\vec{u}$ منظمية عليه

2- أ) حدد معادلة ديكارتية لواسط $[A;B]$

ب) حدد Ω تقاطع واسطات المثلث ABC

3- حدد معادلة ديكارتية للارتفاع المار من A

3- شرط تعامد مستقيمين

خاصية

في مستوى منسوب إلى معلم م.م نعتبر

$(D'):a'x+b'y+c'=0$ $\quad$ $(D):ax+by+c=0$ حيث $(a';b')\neq(0;0)$; $(a;b)\neq(0;0)$

$$(D)\perp(D')\Leftrightarrow aa'+bb'=0$$

نتيجة

$(D'):y=m'x+p'$ $\quad$ $(D):y=mx+p$

$$(D)\perp(D')\Leftrightarrow mm'=-1$$

4- مسافة نقطة عن مستقيم

نشاط

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$. (D) المستقبم المار من $B(x_B;y_B)$ و $\vec{n}(a;b)$ منظمية عليه. لتكن $A(x_0;y_0)$ نقطة من المستوى، H المسقط العمودي للنقطة A على (D).

أ- أحسب $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA}$ بدلالة $\overrightarrow{HA}$ و $\vec{n}$

ب- أثبت أن $HA=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA}\right|}{\|\vec{n}\|}$

د- ليكن $(D):ax+by+c=0$ حيث $(a;b)\neq(0;0)$

بين أن $HA=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

خاصية

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

ليكن $(D):ax+by+c=0$ حيث $(a;b)\neq(0;0)$ و $A(x_0;y_0)$ نقطة من المستوى

مسافة النقطة A عن المستقيم (D) هي $d(A;(D))=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

تمرين

$(D):3x-4y+1=0$; $A(-2;3)$

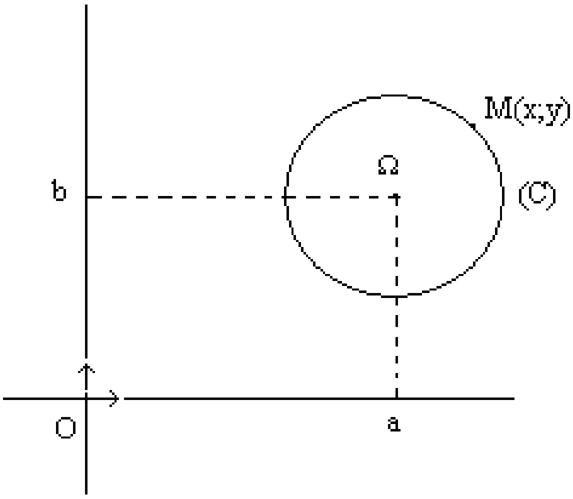
حدد $d(A;(D))$

تمرين

أحسب احداثيتي النقطة H المسقط العمودي للنقطة $A(-3;5)$

على المستقيم $(D):x-2y+8=0$

دراسة تحليلية لدائرة



I- معادلة دائرة

1- معادلة ديكارتية لدائرة معرفة بمركزها و شعاعها

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ،
نعتبر (C) دائرة مركزها $\Omega(a;b)$ و شعاعها r $(r \geq 0)$

$$M(x;y) \in (C) \Leftrightarrow \Omega M = r$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r$$
$$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$$

مبرهنة

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم .
معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a;b)$ و شعاعه r $(r \geq 0)$ هي $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$

حالة خاصة

معادلة الدائرة (C) التي مركزها أصل المعلم و شعاعها r هي $x^2+y^2=r^2$

أمثلة

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم
1- حدد معادلة للدائرة التي مركزها $\Omega(-2;3)$ و شعاعها 4
2- حدد معادلة للدائرة التي مركزها $A(2;3)$ وتمر من النقطة $B(1;-3)$

ملاحظة

* بوضع $c = a^2+b^2-r^2$
معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a;b)$ و شعاعها r تكتب على شكل
$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$
* نعتبر $\{\Omega\}$ دائرة مركزها Ω و شعاعها منعدم

2- دراسة المعادلة $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

لتكن (E) مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

$$M(x;y) \in (E) \Leftrightarrow x^2+y^2-2ax-2by+c=0$$
$$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2 = a^2+b^2-c$$

إذا كان $a^2+b^2-c \prec 0$ فان $(E)=\varnothing$
إذا كان $a^2+b^2-c=0$ فان $(E)=\{\Omega(a;b)\}$
إذا كان $a^2+b^2-c \succ 0$ فان $(E)=C(\Omega(a;b);r)$ حيث $r=\sqrt{a^2+b^2-c}$

مبرهنة

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم. a و b و c أعداد حقيقية.
$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ هي معادلة لدائرة إذا وفقط إذا كان $a^2+b^2-c \geq 0$
مركز هذه الدائرة هو $\Omega(a;b)$ وشعاعها $r=\sqrt{a^2+b^2-c}$

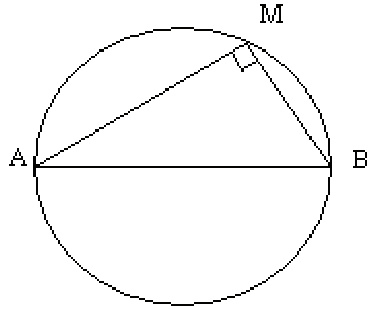
تمرين

حدد (E) مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث $x^2+y^2-2x+y+7=0$

حدد (E') مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث $x^2+y^2-6x+4y-7=0$

3- معادلة معرف بأحد أقطارها

لتكن (C) دائرة أحد أقطارها $[AB]$ حيث $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$



$$M(x;y)\in(C)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$$
$$\Leftrightarrow (x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$$

مبرهنة

ليكن A و B نقطتين مختلفتين

مجموعة النقط M حيث $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$ هي الدائرة (C) التي أحد أقطارها $[AB]$

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ، معادلة الدائرة (C) التي أحد أقطارها $[AB]$ هي

$$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$$

تمرين

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم. نعتبر $A(-1;2)$ و $B(-5;4)$ و $C(-3;6)$

1- حدد الدائرة (C) التي أحد أقطارها $[AB]$

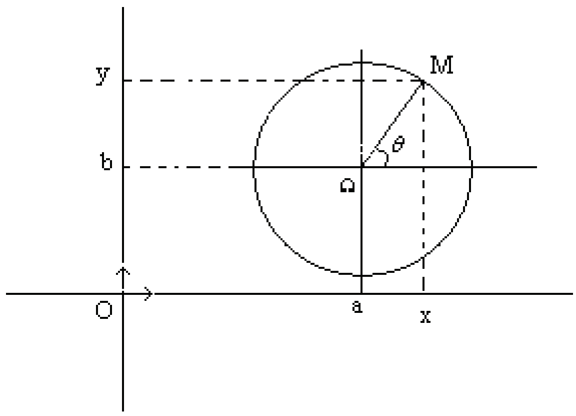
2- أ- تأكد أن النقط A و B و C غير مستقيمية

ب- حدد معادلة للدائرة المحيطة بالمثلث ABC

4- تمثيل بارامتري لدائرة

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم. نعتبر (C) دائرة مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها غير منعدم r

$$M(x;y)\in(C)\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-a}{r}\right)^2+\left(\frac{y-b}{r}\right)^2=1$$



ومنه يوجد عدد حقيقي θ من $[0;2\pi[$ حيث

$$\begin{cases}\dfrac{x-a}{r}=\cos\theta\\[2mm] \dfrac{y-b}{r}=\sin\theta\end{cases}$$

$$M(x;y)\in(C)\Leftrightarrow \exists\theta\in\mathbb{R}/\begin{cases}x=a+r\cos\theta\\ y=b+r\sin\theta\end{cases}$$

مبرهنة و تعريف

مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم.

الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها r $(r\succ 0)$ هي مجموعة النقط $M(x;y)$ التي

تحقق $\theta\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=a+r\cos\theta\\ y=b+r\sin\theta\end{cases}$

النظمة $\theta\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=a+r\cos\theta\\ y=b+r\sin\theta\end{cases}$ تسمى تمثيلا بارامتري لدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها r

حالة خاصة

التمثيل البارامتري للدائرة مركزها أصل المعلم وشعاعها r هي $\theta \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

تمرين

حدد تمثيلا بارامتريا للدائرة (C) المعرفة بالمعادلة $x^2+y^2+4x-6y+9=0$

5- داخل و خارج دائرة

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم. نعتبر (C) دائرة مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها r

نعتبر $c=a^2+b^2-r^2$

$\Omega M = r \Leftrightarrow M(x;y)\in(C)$

$x^2+y^2-2ax-2by+c=0 \Leftrightarrow$

M داخل $(C) \Leftrightarrow \Omega M \prec r$

$x^2+y^2-2ax-2by+c\prec 0 \Leftrightarrow$

خاصية

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم. نعتبر (C) دائرة معادلتها

$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

- داخل الدائرة (C) هو مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق $x^2+y^2-2ax-2by+c\prec 0$
- خارج الدائرة (C) هو مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق $x^2+y^2-2ax-2by+c\succ 0$

تمرين

حل مبيانيا

$\begin{cases} x^2+y^2-2x+4y+1\prec 0 \\ x+y+1\geq 0 \end{cases}$

$(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-2x+4y+1)\leq 0$

II- تقاطع مستقيم ودائرة

1- مبرهنة

ليكن (D) مستقيم و (C) دائرة مركزها Ω و شعاعها r

* إذا كان $d(\Omega;(D))\succ r$ فان $(D)\cap(C)=\varnothing$
* إذا كان $d(\Omega;(D))=r$ فان $(D)\cap(C)$ أحادية
* إذا كان $d(\Omega;(D))\prec r$ فان (D) و (C) يتقاطعان في نقطتين مختلفتين.

تمرين

أدرس تقاطع الدائرة (C) و المستقيم (D) في الحالات التالية

1- $(C)=C(\Omega(1;-2);2)$ و $(D): x+2y-1=0$

2- $(C): x^2+y^2-2x+4y+1=0$ و $(D): 3x+4y-6=0$

3- $(C): x^2+y^2-2x+4y+1=0$ و $(D): 3x+4y-5=0$

2- المماس للدائرة

a- تعريف

لتكن (C) دائرة مركزها Ω

(D) مماس للدائرة (C) إذا وفقط إذا كان $d(\Omega;(D))=r$

ملاحظة

لتكن A نقطة من المستوى

إذا كان A داخل دائرة (C) فانه لا يوجد أي مماس لها مار من A

إذا كان $A \in (C)$ فانه يوجد مماس وحيد لـ (C) مار من A

إذا كان A خارج دائرة (C) فانه يوجد مماسان لها ماران من A

b- المماس لدائرة عند أحد نقطها

أ- تعريف

لتكن (C) دائرة مركزها Ω و A نقطة منها

تقول إن المستقيم (D) مماس للدائرة (C) عند النقطة A إذا وفقط إذا كان (D) عموديا على (ΩA) في A.

ب- خاصية

لتكن (C) دائرة مركزها Ω و شعاعها r و A نقطة منها

لتكن M نقطة من (D)

(D) مماس للدائرة (C) عند A $\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = r^2$

خاصية

لتكن (C) دائرة مركزها Ω و شعاعها r و A نقطة منها

(D) مماس للدائرة (C) عند النقطة A اذا وفقط اذا كان $\overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = r^2 \quad \forall M \in (D)$

ج- معادلة المماس عند أحد نقطها

ليكن (D) مماس للدائرة (C) مركزها Ω و شعاعها r عند النقطة $A(x_0;y_0)$

لتكن $M(x;y)$

$$M \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = r^2$$

$$M \in (D) \Leftrightarrow (x-a)(x-x_0)+(y-b)(y-y_0)=r^2$$

$$\Leftrightarrow xx_0+yy_0-a(x+x_0)-b(y+y_0)+c=0$$

حيث $c = a^2+b^2-r^2$

خاصية

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم. إذا كانت (C) دائرة معادلتها $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ فان معادلة المماس لها عند $A(x_0;y_0)$ هي $xx_0+yy_0-a(x+x_0)-b(y+y_0)+c=0$

ملاحظة

معادلة المماس لدائرة مركزها أصل المعلم وشعاعها r عند النقطة $A(x_0;y_0)$ هي $xx_0+yy_0-r^2=0$

تمرين

نعتبر الدائرة $(C): x^2+y^2-x-2y=0$

تأكد أن $A(1;2) \in (C)$ حدد معادلة للمماس لـ (C) عند A

تمرين

في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم . نعتبر الدائرة (C) التي معادلتها $x^2+y^2+2x-2y-2=0$

1- حدد مركز وشعاع (C)

2- حدد موضع $A(2;3)$ بالنسبة للدائرة (C)

3- حدد جميع المماسات للدائرة (C) المارة من A