

الثانية علوم تجريبية	الأعداد العقدية	ح . بوعيون
----------------------	-----------------	------------

تمرين 1

حل في \mathcal{C} المعادلتين:

$$\bar{z}z + 3(z - \bar{z}) = 13 + 18i \quad \text{و} \quad (1 - i)z - 3i\bar{z} = 1 + 4i$$

تمرين 2

ليكن a و b من \mathcal{C} بحيث $a \neq b$ و $|a| = |b| = 1$

بين أن : $(\forall z \in \mathcal{C}) : \frac{z + ab\bar{z} - (a+b)}{a-b} \in i\mathbb{R}$

تمرين 3

نعتبر العدد $u = \frac{z+2i}{2z+i}$ حيث z عدد عقدي ينتمي إلى $\mathcal{C} - \{-\frac{i}{2}\}$

بين أن $|u| = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$.

تمرين 4

حدد المجموعتين :

$$F = \{ M(z) / |z-1+i| = |z+1+2i| \} \quad \text{و} \quad E = \{ M(z) / |2z+1-i| = 2 \}$$

تمرين 5

ليكن z عدد عقدي $(z \neq -1)$, M صورة العدد z في المستوى العقدي . نضع $u = \frac{z(1+i) - i}{z+1}$

(1) حدد مجموعة النقط M التي يكون من أجلها u عددا حقيقيا.

(2) " " " " " " " " " " " " " " تخيليا صرفا .

(3) " " " " " " " " " " " " " " $|u| = \sqrt{2}$

تمرين 6

نعتبر في المستوى العقدي النقط A و M و M' صور الأعداد العقدية i و z و iz على التوالي .
حدد مجموعة النقط M التي تكون من أجلها النقط A و M و M' مستقيمية

تمرين 7

نعتبر الأعداد $z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ و $z_2 = 1-i$ و $z = \frac{z_1}{z_2}$

أحسب معيار وعمدة الأعداد z_1 و z_2 و z واستنتج $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$

تمرين 8

(1) نعتبر النقط $A(1+3i)$ و $B(3+i)$ و $C(1-i)$ حدد طبيعة المثلث (ABC) .

(2) نعتبر النقط $A(a)$ و $B(b)$ و $C(c)$ بحيث a و b و c مختلفة و تحقق

$$(c-b) = (-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2})(a-c)$$

بين أن المثلث (ABC) متساوي الأضلاع .

تمرين 9

حدد المجموعتين

$$F = \left\{ M(z) / \arg(z-1-i)^2 \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \right\} \quad \text{و} \quad E = \left\{ M(z) / \arg(z-i) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \right\}$$

تمرين 10

لكل عدد عقدي $z \neq i$ نضع $f(z) = \frac{\bar{z}}{1-i\bar{z}}$

(1) بين أن : $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |z|^2 - \text{Im}(z) = 0$

(b) حدد المجموعة $E = \{M(z) \in P / f(z) \in \mathbb{R}\}$

(2) حدد المجموعة $F = \{M(z) \in P / f(z) \in i\mathbb{R}\}$

(3) نعتبر النقط $A(i)$ و $M(z)$ و $M'(f(z))$

(a) بين أن : $f(z) - i = \frac{1}{|1-i\bar{z}|^2}(z-i)$

(b) استنتج قياسا للزاوية $(\widehat{AM}, \widehat{AM'})$.

تمرين 11

ليكن $\theta \in [0, 2\pi]$ و $\alpha \in]0, \pi]$ أحسب معيار وعمدة كل من الأعداد

$$z_1 = 1 + \sin \theta + i \cos \theta \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{\cos \alpha + i \sin \alpha - i}{\cos \alpha + i \sin \alpha + i}$$

تمرين 12

نعتبر العددين : $a = \frac{1+i\sqrt{3}}{4}$ و $b = \frac{\sqrt{3}-i}{4}$.

(1) اكتب a و b على الشكل المثلي.

(2) استنتج معيار وعمدة كل من العددين : $z_1 = a + b$ و $z_2 = a - b$

تمرين 13

(1) حدد الجذور المكعبة لكل من العددين -1 و i

(2) استنتج حلول المعادلة : $z^6 + (1-i)z^3 - i = 0$

تمرين 14

احسب $(2+i)^3$ واستنتج الجذور من الرتبة 3 لـ : $2+11i$

تمرين 15

نعتبر المعادلة : $(E) : z^3 - 2(2+3i)z^2 - 4(1-5i)z + 16(1-i) = 0$

(1) بين أن المعادلة (E) تقبل حلا حقيقيا z_0 .

(2) حل في المعادلة (E).

تمرين 16

نعتبر المعادلة : $(E) : z^4 - z^3 + 2z^2 - z + 1 = 0$

(1) بين انه إذا كان α حلا للمعادلة فإن $\bar{\alpha}$ حل للمعادلة.

(2) تحقق أن $z_0 = i$ حل للمعادلة ثم حل في المعادلة (E).

تمرين 17

(1) حل في المعادلة $z^2 + (1+2i\sqrt{3})z - 3 = 0$

واكتب حليها z_1 و z_2 على الشكل المثلي $(|z_1| < |z_2|)$.

(2) لتكن $A(z_1)$ و $B(z_2)$ حدد لحق النقطة C بحيث يكون المثلث (ABC) متساوي الساقين في $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$ و A

تمرين 18

نعتبر العدد : $z = 5(\sqrt{2}-\sqrt{2} - i\sqrt{2}+\sqrt{2})$

- (1) أحسب z^2 وأكتب z^2 على الشكل المثلثي .
- (2) حدد معيار z و $\arg(z)$.

تمرين 19

نعتبر في \mathbb{C} المعادلة $(E) : z^2 - 2(\sqrt{3}-i)z + 2(3-i\sqrt{3}) = 0$

- (1) حل في \mathbb{C} المعادلة (E)
- (2) نعتبر العددين $u = \sqrt{3} + i$ و $v = \sqrt{3} - 3i$ حدد الشكل المثلثي لكل من u و v ثم أحسب $(\frac{u}{v})^{2000}$
- (3) نضع $w = \frac{\sqrt{3}u}{v}$ (a) حدد الشكل المثلثي للعدد w .
- (b) حدد حسب قيم العدد النسبي n الشكل الجبري للعدد $(w)^n$
- (4) نعتبر النقط $A(u)$ و $B(-u)$ و $C(v)$ و $D(\bar{v})$.
- (a) حدد الشكل الجبري ل $\frac{u-\bar{v}}{u-v}$ واستنتج أن A و C و D مستقيمية .
- (b) تحقق أن : $\frac{v-u}{v+u} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ واستنتج طبيعة (ABC)

تمرين 20

(1) اكتب على الشكل المثلثي العددين $a = \frac{1+i}{2}$ و $b = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$

- (b) حدد الأعداد النسبية n التي يكون من أجلها $(ab)^n \in i\mathbb{R}$
- (2) حل في \mathbb{C} المعادلة $(E) : z^2 + (-1+2i)z - i = 0$
- (3) ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة بحيث $\text{Im}(z_1) < \text{Im}(z_2)$
- (a) بين أن $a z_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \cdot b$ استنتج الشكل المثلثي للعدد z_1 .
- (c) أكتب z_1, z_2 على الشكل المثلثي واستنتج الشكل المثلثي ل z_2
- (4) نعتبر النقطتين $M(z)$ و $M'(z')$ بحيث $z' = az$ و $z \in \mathbb{C}$. بين أن المثلث (OMM') متساوي الساقين وقائم الزاوية في M'

تمرين 21

ليكن u عدد عقدي ونعتبر في \mathbb{C} المعادلة : $(E_u) : z^2 - (2u - i\bar{u})z - 2i|u|^2 = 0$

- (1) حل في \mathbb{C} المعادلة (E_u) .
- (2) نضع $z' = 2u$ و $z'' = -i\bar{u}$ ونعتبر النقط $A(\frac{z'}{2})$ و $B(z'')$ و $C(\frac{\bar{z}'+2z''}{2})$ بين أن الرباعي (OACB) مربع .

تمرين 22

لكل عدد عقدي $z \neq 1$ نضع $f(z) = \frac{iz^2}{z-1}$

(1) حدد المجموعة $E = \{M(z) \in P / f(z) \in i\mathbb{R}^*\}$

(2) (a) حل في \mathcal{C} المعادلة $\bar{z}^3 = -1$

(b) حل في \mathcal{C} المعادلة $f\left(\frac{1}{z}\right) = -\overline{f(z)}$

(3) (a) حل في \mathcal{C} المعادلة $\sqrt{3}f(z) = 1$: (E) وأكتب الحلين z' و z'' على الشكل المثلثي $(|z'| = 1)$.

(b) أحسب z'^{2001}

(c) نعتبر النقط $A(1)$ و $B(z')$ و $C(z'')$ و $D(z'z'')$.

بين أن $CD = \frac{\sqrt{3}}{3}AB$ وحدد القياس الرئيسي لـ $(\widehat{OC}, \widehat{OD})$

(d) ما هي طبيعة المثلث (OCD) ؟

(5) نضع $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$ مع $]-\pi, 0[$

(a) حدد معيار وعمدة $f(z)$.

(b) حدد z بحيث يكون $(f(z))^3 = |f(z)|^3$

تمرين 23

نعتبر في \mathcal{C} المعادلة $az^2 - i(a^4 + 1)z - a^3 = 0$ حيث $a \in \mathcal{C}^*$

(1) حدد قيم a التي يكون من أجلها للمعادلة (E) حلا وحيدا .

(2) نفترض أن $a^4 \neq 1$. (a) حل في \mathcal{C} المعادلة (E) .

(b) أعط معيار وعمدة حلي المعادلة (E) بدلالة معيار وعمدة a .

(c) حدد قيم a التي يكون من أجلها المعادلة (E) متقابلين .

تمرين 24

نعتبر المعادلة : $(E) : 2z^2 - 2(\alpha + i)z + \alpha^2 - 1 = 0$: $\alpha \in \mathbb{R}^* - \{1\}$

(1) احسب $(1 + i\alpha)^2$ ثم حل المعادلة (E) . ليكن z_1, z_2 حلي المعادلة (E) مع $\text{Re}(z_1) < \text{Re}(z_2)$

(2) اكتب z_1, z_2 على الشكل المثلثي .

(3) نفترض أن $\alpha > 1$ ونضع $Z = \frac{z_1}{z_2}$ أعط الشكل الجبري للأعداد : $z^{4n}, z^{4n+1}, z^{4n+2}, z^{4n+3}$

(n ∈ IN) ثم احسب Z^{1989} .

تمرين 25

نعتبر التطبيق g من $\mathcal{C} - \{-1, 1\}$ نحو \mathcal{C} بما يلي $g(z) = \frac{z}{1-z^2}$

(1) تحقق أن $g(z) = \frac{z(1-\bar{z}^2)}{|1-z^2|^2}$: $(\forall z \in \mathcal{C} - \{-1, 1\})$

(2) حدد طبيعة المجموعة : $E = \{M(z) / g(z) \in i\mathbb{R}\}$

(3) نضع $z = \cos \theta + i \sin \theta$ حيث $\theta \in]0, \pi[$

(a) بين أن $g(z) = \frac{i}{2 \sin \theta}$ وأن $zg(z) = \frac{1}{2 \sin \theta} (\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) + i \sin(\theta + \frac{\pi}{2}))$

(b) اكتب على الشكل الجبري العدد : $(z_0 g(z_0))^6$ حيث $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

تمرين 26

- نعتبر المعادلة : $z^2 - 4z \sin \alpha + 4 = 0$ (E) حيث $\alpha \in [-\pi, \pi] - \{0\}$.
 (1) حل في \mathbb{C} المعادلة (E) واحسب معيار وعمدة z_1 و z_2 حلي (E)
 (2) احسب (a) $S = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$ و $S = z_1^4 + z_2^4$.
 (b) حدد قيمة α بحيث $S = 0$.

تمرين 27

- ليكن $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$. نعتبر المعادلة : $2z^2 + (a+1)(1-i\sqrt{3})z - a(1+i\sqrt{3}) = 0$
 (1) احسب (a) $-\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})^2$ ثم حل المعادلة (E) واكتب الحلين على الشكل المثلثي .
 (b) اكتب الجذور الرابعة لحلي المعادلة (E) على الشكل المثلثي .
 (2) نعتبر النقط $A(ae^{i\frac{2\pi}{3}})$ ، $B(e^{i\frac{\pi}{6}})$ و $C(-e^{i\frac{\pi}{6}})$.
 (a) بين أن المثلث (ABC) متساوي الساقين في A .
 (b) حدد قيمة a التي يكون من أجلها $\frac{\pi}{2} [2\pi]$ $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv$

تمرين 28

- ليكن $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$ حدد معيار وعمدة حلي المعادلة $z^2 - 2z + 1 + \cos(2\alpha) - i \sin(2\alpha) = 0$.

تمرين 29

- نعتبر العدد : $z = 5(\sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}})$
 (1) احسب z^2 وأكتب z^2 على الشكل المثلثي .
 (2) حدد معيار Z و $\arg(z)$.
 (3) ليكن $u = re^{i\theta}$ حيث $r > 0$ و $\theta \in \mathbb{R}$
 حدد وأنشئ المجموعات التالية :
 $G = \{M(u) \in P / 5 \leq |uz| \leq 15\}$ $F = \{M(u) \in P / uz \in i\mathbb{R}\}$ $E = \{M(u) \in P / uz \in \mathbb{R}\}$

تمرين 30

- (1) نعتبر النقط $A(1+3i)$ و $B(3+i)$ و $C(1-i)$ حدد طبيعة المثلث (ABC) .
 (2) نعتبر النقط $A(a)$ و $B(b)$ و $C(c)$ بحيث a و b و c مختلفة و تحقق
 $(c-b) = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(a-c)$:
 بين أن المثلث (ABC) متساوي الأضلاع .
 (4) حدد المجموعة $E = \{M(z) \in P / f(z) \in \mathbb{R}\}$

تمرين 31

- (1) حل في \mathbb{C} المعادلة $z^{12} = 1$ واكتب الحلول على الشكل المثلثي والجبري .
 (2) استنتج حلول المعادلة $z^8 + z^4 + 1 = 0$