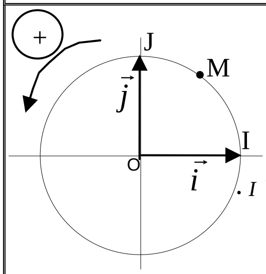
الأولى ب ع رياضية	الحساب المثلثي ملخص الدرس	ح.بوعيون

I- الأفاصيل المنحنية



1) (* ليكن $(o,\vec{i},\vec{j})$ م م م. ولتكن U الدائرة التي مركزها o وشعاعها 1

*)نختار المنحى المعاكس لعقربي الساعة كمنحى موجب. ولتكن $I(1,0)$.

(* الدائرة U تسمى الدائرة المثلثية التي أصلها I.

2) لتكن M نقطة من U . للحصول على أفصول منحنى لـــ M .

نختار قوسا تؤدي من I نحو M ونقيس طولها.

ليكن α طول هذه القوس.

(* إذا كان الانتقال من I نحو M يتم حسب المنحى الموجب فإن α أفصول منحنى للنقطة M .

(* إذا كان الانتقال من I نحو M يتم حسب المنحى السالب فإن $-\alpha$ أفصول منحنى للنقطة M .

3) للحصول على جميع الأفاصيل المنحنية لنقطة M يكفي أن نتعرف على أحد هذه الأفاصيل فقط (عادة نختار أقصر قوس تؤدي من I إلى M).

وإذا كان α أحد هذه الأفاصيل فإن الأفاصيل المنحنية للنقطة M هي الأعداد التي تكتب على شكل $\alpha+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

4) يكون العددان α وβ أفصولين منحنين لنفس النقطة إذا وفقط إذا كان $\alpha-\beta=2k\pi$ يعني $\alpha=\beta-2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ ونكتب $\alpha\equiv\beta[2\pi]$.

ملاحظة: 1)

$$\alpha\equiv\beta[2\pi]\Leftrightarrow\alpha=\beta+2k\pi$$
$$\Leftrightarrow\alpha-\beta=2k\pi$$
$\Leftrightarrow$ (α وβ أفصولين منحنين لنفس النقطة)

2) (* $\alpha\equiv\alpha+2n\pi\quad[2\pi]$

(* $\alpha\equiv\beta\,[2\pi]\Leftrightarrow\alpha\equiv\beta+2n\pi\;\;[2\pi]$

5) من بين جميع الأفاصيل المنحنية لنقطة M يوجد أفصول منحنى وحيد α_0 يحقق $-\pi\langle\alpha_0\langle\pi$. α_0 يسمى الأفصول المنحنى الرئيسي للنقطة M

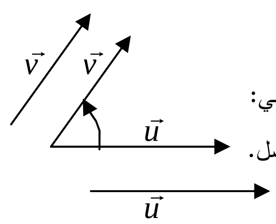
(ونحصل عليه باختيار أقصر قوس تؤدي من I نحو M).

6) نعتبر الأعداد $\alpha+\frac{2k\pi}{n}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

عدد النقط التي أفاصيلها المنحنية هي هذه الأعداد هو n . ومن أجل إنشائها يكفي تعويض k ب n قيمة متتابعة. عادة نعوض k بالقيم $0,1,2,....(n-1)$

و هذه النقط تكون مضلعا منتظما محاطا بالدائرة U .

II- قياس الزوايا الموجهة



1) لتكن $\vec{u},\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين.

من أجل تحديد قياسات الزاوية الموجهة $(\vec{v},\vec{u})$ للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ نتبع ما يلي:

(* نزيح المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ إلى نفس الأصل.

(* المتجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ تحددان زاويتين هندسيتين نختار إحداهما

(عادة نختار الزاوية الحادة) ونحدد قياسها الهندسي بالرديان. ليكن α هذا القياس.

$\longleftarrow$) إذا التحرك من $\vec{u}$ نحو $\vec{v}$ داخل هذه الزاوية يتم حسب المنحى الموجب فإن كل عدد على شكل $\alpha+2k\pi$ هو قياس لهذه الزاوية ونكتب

$\overline{(\vec{u},\vec{v})}=\alpha+2k\pi$ أو $\overline{(\vec{u},\vec{v})}\equiv\alpha[2\pi]$.

$\longleftarrow$) إذا كان التحرك من $\vec{u}$ نحو $\vec{v}$ داخل هذه الزاوية يتم حسب المنحى الموجب فإن كل عدد على شكل $-\alpha+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ هو قياس لهذه الزاوية.

ونكتب $\overline{(\vec{u},\vec{v})}=-\alpha+2k\pi$ أو $\overline{(\vec{u},\vec{v})}\equiv-\alpha[2\pi]$.

2) خاصيات.

a) من بين قياسات $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$ يوجد قياس وحيد يحقق $-\pi\langle\alpha_0\le\pi$ ويسمى القياس الرئيسي.

b) $\overline{(\vec{u},\vec{v})}\equiv\overline{(\vec{u},\vec{w})}+\overline{(\vec{w},\vec{v})}\;[2\pi]$ (علاقة شال).

c) $\overline{(\vec{u},\vec{v})}\equiv-(\vec{v},\vec{u})\quad[2\pi]$.

d) إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمين ولهما نفس المنحى فإن $\overline{(\vec{u},\vec{v})}\equiv0[2\pi]$

e) إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمين ولهما منحيان متعاكسان فإن $(\vec{u},\vec{v})\equiv\pi[2\pi]$

f) يكون αوβ قياسين لنفس الزاوية إذا وفقط إذا كان $\alpha-\beta=2k\pi$ يعني $\alpha\equiv\beta[2\pi]$.

ملاحظة:

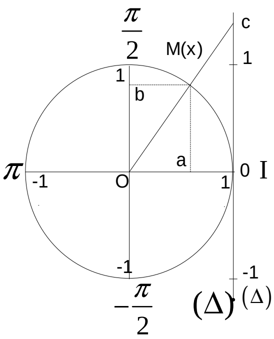
1) تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمين إذا وفقط إذا كان حاملاهما متوازيين.

2) المتجهتين $\vec{u}$ و $\alpha\vec{u}$ (مع $\alpha\rangle0$) مستقيمان ولهما نفس المعنى.

3) المتجهتين $\vec{u}$ و $\alpha\vec{u}$ (مع $\alpha\langle0$) مستقيمان ولهما منحيان متعاكسان.

III- الدوال المثلثية

1)تعريف



لتكن U الدائرة المثلثية التي أصلها I .

وليكن (Δ) المحور المماس لـ U في I .

ندرج المحور (Δ) بنفس وحدة معلم وأصلهِ I .

(* ليكن x من $\mathbb{R}$ و M النقطة التي أفصولها المنحني هو x

ليكن a أفصول لـ M و b

ارتوب M يعني $M(a,b)$.

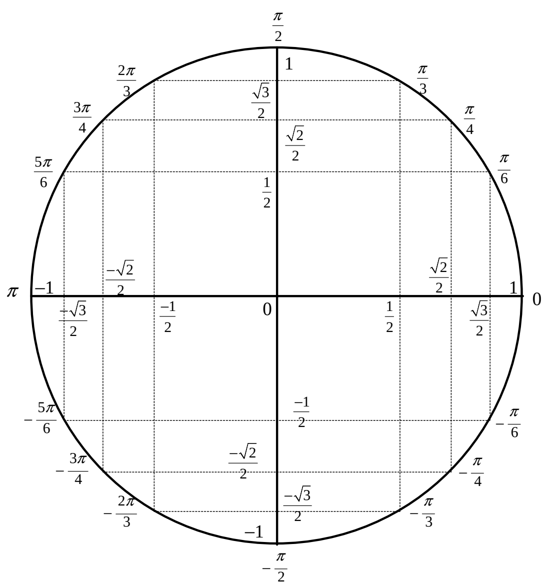
c أفصول تقاطع (OM) مع (Δ) على المحور (Δ) لدينا

$$\cos x=a\qquad\sin x=b\qquad\tan x=c$$

2) خاصيات

(a

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0



b) تكون $\tan(x)$ معرفة إذا وفقط إذا كان $\begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2}+2k\pi \\ x \neq -\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \end{cases}$ يعني $x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$

c) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $\qquad \cos^2 x+\sin^2 x = 1$ $\qquad 1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

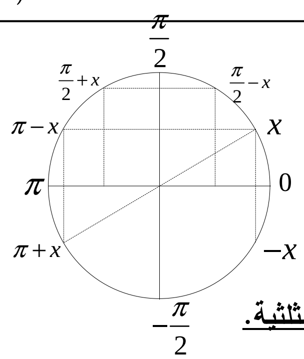
d) $\cos(x+2k\pi)=\cos x$ $\qquad \sin(x+2k\pi)=\sin x$ $\qquad \tan(x+k\pi)=\tan x$

e) $\cos(-x)=\cos x$ $\qquad \sin(-x)=-\sin x$ $\qquad \tan(-x)=-\tan x$

f)
$$\cos(\pi-x)=-\cos x \qquad \sin(\pi-x)=\sin x \qquad \tan(\pi-x)=-\tan x$$
$$\cos(\pi+x)=-\cos x \qquad \sin(\pi+x)=-\sin x \qquad \tan(\pi+x)=\tan x$$

g)
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\tan x}$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\frac{1}{\tan x}$$

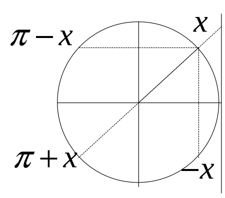
h) $(\forall x \in \mathbb{R}): -1 \leq \cos x \leq 1 \quad ; \quad -1 \leq \sin x \leq 1$



3) المعادلات المثلثية.

a)
$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi$$
$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi+2k\pi \qquad \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha+2k\pi \\ x = -\alpha+2k\pi \end{cases}$$
$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}+k\pi$$

b)
$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}+2k\pi$$
$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2}+2k\pi$$
$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$$
$$\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha+2k\pi \\ x = \pi-\alpha+2k\pi \end{cases}$$



c) $\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha+k\pi$

ملاحظات.

1) إذا كان $\alpha \notin [-1,1]$ فإن المعادلتين $\cos x = a$ و $\sin x = a$ ليس لهما حل.

2) تكون المعادلة $\tan(u(x)) = a$ معرفة إذا وفقط إذا كان $\begin{cases} u(x) \ \text{معرفة} \\ u(x) \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi \end{cases}$

3)
$$-\cos\alpha = \cos(\pi-\alpha) \qquad -\sin\alpha = \sin(-\alpha) \qquad -\tan\alpha = \tan(-\alpha)$$
$$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \qquad \cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

4) المتراجحات المثلثية. (انظر التمارين)

ملاحظة

1) نضع $f(x) = a\cos(u(x))+b$ أو $f(x) = a\sin(u(x))+b$

*) إذا كان a و b غيرمتقابلين وغير متساويين فإن $f(x)$ تغير الإشارة في حلول المعادلة $f(x)=0$

*) إذا كان a و b متقابلين أو متساويين فإن $f(x)$ لها إشارة ثابتة

2) نضع $f(x): a\tan(u(x))+b$ $f(x)$ تغير الإشارة في حلول المعادلة $f(x)=0$ وفي الأعداد التي تكون غير معرفة فيها.

5) صيغ التحويل

a)
$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b \qquad \tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\cdot\tan b}$$
$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$$
$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b \qquad \tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\cdot\tan b}$$
$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$$

b)
$$\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a$$
$$=2\cos^2 a-1$$
$$=1-2\sin^2 a$$
$$\sin(2a)=2\sin a\cos a$$
$$\tan(2a)=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

c)
$$\cos^2 a=\frac{1+\cos(2a)}{2}$$
$$\sin^2 a=\frac{1-\cos(2a)}{2}$$
$$\sin a\cos a=\frac{1}{2}\sin(2a)$$

d)
$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$$
$$\sin a\sin b=-\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)-\cos(a-b)\right]$$
$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$$

e)
$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\cdot\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p-\sin q=2\cos\frac{p+q}{2}\cdot\sin\frac{p-q}{2}$$

f) نضع $t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$: لدينا .

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x=\frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan x=\frac{2t}{1-t^2}$$

g) من أجل تحويل $f(x)=a\cos x+b\sin x$ نتبع ما يلي:

$$f(x)=a\cos x+b\sin x$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\alpha\cos x+\sin\alpha\sin x\right)$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\cos x\cos\alpha+\sin x\sin\alpha\right)$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)$$

مع $\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$