الأولى علوم تجريبية	الحساب المثلثي الجزء الأول	الأستاذ : الحيان

التمرين 1 :

نضع لكل x من $\mathbb{R}$:

$$A(x)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$$

1) بين أن : $A(x)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

2) حل المعادلة : $x\in\mathbb{R}\ ;\ A(x)=\sqrt{2}$

3) حل المتراجحة : $x\in\left]-\pi,\pi\right];\ A(x)<\sqrt{2}$

التمرين 2 :

$\boxed{I}$ أحسب $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ و $\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right)$ و $\cos\left(\frac{1997\pi}{8}\right)$

علما أن : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$\boxed{II}$ 1) بين أن لكل $a\in\mathbb{R}^{+*}$: $a+\frac{1}{a}-2=\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$

2) استنتج أن لكل $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, لدينا :

$$\sin(x)+\cos(x)+\tan(x)+\frac{1}{\sin(x)}+\frac{1}{\cos(x)}+\frac{1}{\tan(x)}>6$$

التمرين 3 :

1) أ) حل المعادلة : $(E);x\in\mathbb{R},2\cos(x)=1$

ب) مثل حلول المعادلة (E) على الدائرة المثلثية .

2) ليكن ABC مثلثا بحيث: $AB=4$ و $AC=6$

و $B\hat{A}C=\frac{\pi}{3}$

أ) بين أن : $BC=2\sqrt{7}$.

ب) باستعمال صيغة هيرون , أحسب مساحة المثلث ABC .

التمرين 4 :

نعتبر التطبيق : $F(x)=2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\sin(x+7\pi)-1$

حيث $x\in\mathbb{R}$

1) بين أن : $F(x)=(\sin x+1)(2\sin x-1)$

2) أ) حل في المجال $\left]-\pi,\pi\right]$ المعادلة $F(x)=0$ ثم مثل الحلول على الدائرة المثلثية .

ب) لتكن M_1 و M_2 و M_3 ثلاث نقط من الدائرة المثلثية بحيث أفاصيلها المنحنية هي على التوالي $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}$ و $\frac{-\pi}{2}$

بين أن المثلث $M_1M_2M_3$ متساوي الأضلاع .

التمرين 5 :

نضع لكل x من $\mathbb{R}$: $A(x)=2\cos^2(x)+\sin(x)-1$

1) أحسب $A\left(\frac{31\pi}{6}\right)$

2) تحقق من أنه لكل x من $\mathbb{R}$, لدينا :

$$A(x)=(1-\sin x)(1+2\sin x)$$

3) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $A(x)=0$.

التمرين 6 :

ABC مثلث بحيث : $\hat{A}=\frac{\pi}{3}$ و $\hat{B}=\frac{\pi}{4}$ و $AB=4$

نضع : $AC=b$ و $BC=a$

1) بين أن : $b=a\frac{\sqrt{6}}{3}$

2) برهن على أن : $a^2+4a\sqrt{6}-48=0$

(يمكنك استعمال مبرهنة الكاشي)

3) أحسب a ثم استنتج قيمة $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

التمرين 7 :

نضع لكل x من $\mathbb{R}$: $A(x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)$

1) أحسب : $A\left(\frac{\pi}{4}+3\pi\right)$

2) أ) بين أنه لكل عدد حقيقي x من المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, لدينا :

$$A(x)=\frac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}$$

ب) حل في المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ المعادلة : $A(x)=\frac{1}{2}$

التمرين 8 :

لكل x من $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$, نضع :

$$A(x)=\frac{1}{\cos(x)}-\cos(x)$$

1) بين أن : $A(x)=\tan(x)\sin(x)$

2) بين أن : $A(\pi-x)=A(\pi+x)=-A(x)$

3) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $A(x)=\cos(x)$ ثم مثل حلولها على الدائرة المثلثية .

التمرين 9 :

1) حدد S مجموعة حلول المعادلة : $x\in\mathbb{R};\tan(2x)=0$

2) أ) بين أن $\tan\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\frac{1}{\tan(2x)}$ لكل $x\in S$

ب) حل في المجال $\left[0,\pi\right[$ المعادلة : $\tan(x)\tan(2x)=1$

التمرين 10 :

1) حل في $\mathbb{R}$ العادلة : $(E):\left(\tan x+\sqrt{3}\right)(\tan x-1)=0$

2) تحقق من أن النقط $M_1\left(\frac{\pi}{4}\right)$ و $M_2\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ و $M_3\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ و

$M_4\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ هي تمثيلات حلول المعادلة (E) على الدائرة المثلثية .

التمرين 11 :

1) مثل على الدائرة المثلثية النقطتين M و N بحيث $-\frac{19\pi}{4}$ أفصول منحن للنقطة M و $\frac{29\pi}{3}$ أفصول منحن للنقطة N .

2) أ) نضع :

$$P(x)=\sin\left(x-\frac{5\pi}{2}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)+\sin(3\pi+x)$$

بين أن : $P(x)=\sin(x)-\cos(x)$

ب) حل في $]-\pi,\pi[$ المعادلة : $P(x)=0$

التمرين 12 :

نضع لكل x من $\mathbb{R}$: $A(x)=\cos^4(x)-\sin^4(x)$

1) أكتب $A(x)$ بدلالة $\tan(x)$.

2) بين أن : $A(x)=\left(\sqrt{2}\cos x-1\right)\left(\sqrt{2}\cos x+1\right)$

3) حل في المجال $]-\pi,\pi[$ المتراجحة : $A(x)\geq 0$ ومثل الحلول على الدائرة المثلثية .

التمرين 13 :

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\sin(3x)=\cos(x)$

2) مثل الحلول على الدائرة المثلثية .

التمرين 14 :

1) حل في المجال $]-\pi,\pi[$ المعادلة :

$$4\cos^2(x)-2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cos(x)-\sqrt{6}=0$$

ثم مثل الحلول على الدائرة المثلثية .

2) حل في المجال $]-\pi,\pi[$ المتراجحة :

$$4\cos^2(x)-2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cos(x)-\sqrt{6}\geq 0$$

التمرين 15 :

حل في المجال $[0,\pi]$ ومثل الحلول على الدائرة المثلثية ما يلي

1) $1-\sqrt{2}\cos(x)=0$

2) $\cos(2x)-\sin(2x)=0$

3) $\dfrac{1-\sqrt{2}\cos(x)}{\cos(2x)-\sin(2x)}\leq 0$

التمرين 16 :

1) أحسب $(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2$ لكل $x\in\mathbb{R}$

2) أحسب قيم $\cos x-\sin x$ علما أن $\cos x+\sin x=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

3) حل في $[-\pi,\pi]$ المعادلة : $\cos x+\sin x=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

التمرين 17 :

نضع لكل x من $\mathbb{R}$:

$$A(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

1) بين أن : $A(x)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

2) حل المعادلة : $x\in\mathbb{R}; A(x)=\sqrt{2}$

3) حل المتراجحة : $x\in]-\pi,\pi]; A(x)<\sqrt{2}$.

التمرين 18 :

نضع لكل x من $\mathbb{R}$: $A(x)=\cos(x)\sin(x)$

1) أ) أحسب $A\left(\frac{19\pi}{3}\right)$

ب) بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $A\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=A(x)$

وأن : $A(\pi+x)=A(x)$

2) أ) بين أن لكل x من $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$:

$$A(x)=\frac{\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$$

ب) حل المعادلة : $x\in]-\pi,\pi]; A(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}$

التمرين 19 :

نضع لكل x من $\mathbb{R}$:

$$A(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos(2\pi-2x)+\sin(\pi-x)+\cos(\pi+x)$$

1) بين أن لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $A(x)=\cos(2x)-\cos(x)$

2) أ) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $(E); A(x)=0$

ب) مثل صور حلول المعادلة (E) على الدائرة المثلثية .

التمرين 20 :

لتكن U دائرة مثلثية أصلها A ومرتبطة بالمعلم المتعامد الممنظم (O,i,j)

I و J نقطتان من U أفصولاهما المنحنيين هما على التوالي $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{8}$.

1) مثل النقطتين I و J .

2) أ) بين أن المتجهتين $OA+OI$ و OJ مستقيميتان .

ب) استنتج أن : $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\left(2+\sqrt{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

3) أحسب $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

التمرين 21 :

ليكن $x\in\mathbb{R}$. لتكن (C) الدائرة المثلثية مركزها O.

ولتكن A و B و C نقط من (C) أفاصيلها المنحنية هي على التوالي x و $x+\frac{2\pi}{3}$ و $x+\frac{4\pi}{3}$.

1) أ) بين أن المثلث ABC متساوي الأضلاع.

ب) استنتج أن : $OA+OB+OC=0$.

2) استنتج أن :

$$\cos(x)+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0$$

وأن : $\sin(x)+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0$

التمرين 22 :

نعتبر التطبيق f المعرف بما يلي :

$$f(x)=\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}$$

1) بين أن لكل $x\in\mathbb{R}$: $\sqrt{2}\le f(x)\le 2$

2) أ) بين أن لكل $x\in\mathbb{R}$: $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}\sqrt{1+|\sin x|}$

ب) ليكن α عددا حقيقيا بحيث : $0\le\alpha\le\pi$

حدد قيم α التي تحقق : $f\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=f(\alpha)$

التمرين 23 :

في المستوى الموجه , نعتبر (C) دائرة مركزها O وشعاعها r و M نقطة من المستوى خارج (C).

ليكن (Δ) و (Δ') مستقيمين يمران من M ويقطعان (C) في A و B و A' و B' على التوالي .

1) بين أن لكل متجهتين غير منعدمتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$, لدينا :

$$\overline{(-\vec{u},-\vec{v})}\equiv\overline{(\vec{u},\vec{v})}[2\pi]$$

وأنه إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين ولهما نفس المنحى و $\vec{w}$ متجهة غير منعدمة , فإن : $\overline{(\vec{u},\vec{w})}\equiv\overline{(\vec{v},\vec{w})}[2\pi]$

2) لتكن N نقطة تقاطع (C) والقطعة $[OM]$.

بين أن : $\overline{(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{NB})}\equiv\overline{(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BN})}[2\pi]$

وأن : $\overline{(\overrightarrow{NB'},\overrightarrow{MB'})}\equiv\overline{(\overrightarrow{B'N},\overrightarrow{B'M})}[2\pi]$

3) بين أن :

$$\overline{(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MB'})}\equiv\frac{1}{2}\left[\overline{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'})}+\overline{(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OB'})}\right][2\pi]$$

التمرين 24 :

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان غير منعدمتان بحيث : $\overline{(\vec{u},\vec{v})}\equiv\frac{2\pi}{5}[2\pi]$

أحسب , بترديد 2π , ما يلي :

$\overline{(-\vec{u},-\vec{v})}$ و $\overline{(\vec{u},-\vec{v})}$ و $\overline{(\vec{v},-\vec{u})}$.

التمرين 25 :

نعتبر الدالة f لمتغير حقيقي المعرفة على $D=[0,\pi]-\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

بما يلي : $f(x)=\dfrac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}$

1) أحسب $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ و $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

2) بين أنه مهما يكن $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]-\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$, فإن :

$$1+f(x)\times f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=0$$

3) أكتب $f(x)$ بدلالة $\tan(x)$, لكل x من $D-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

4) حدد إشارة $f(x)$ على $[0,\pi]-\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$.

التمرين 26 :

1) مثل على الدائرة المثلثية U , النقطة M التي $\frac{\pi}{3}$ أفصول منحن لها .

2) لتكن M' نقطة من U حيث $\frac{\pi}{6}$ أفصول منحن لها.

أ) أحسب , بترديد 2π , $\overline{(\overrightarrow{OM'},\overrightarrow{OM})}$

ب) استنتج أن $[OM')$ هو منصف الزاوية $\overline{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM})}$

ج) مثل M' على الدائرة المثلثية U .

3) استنتج تمثيلا للنقطتين $M_1\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ و $M_2\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

4) حدد الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة A من الدائرة المثلثية U التي $\frac{1999\pi}{3}$, أفصول منحن لها , ثم مثلها .

5) هل العددان الحقيقيان $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ متوافقان بترديد 2π ؟ علل جوابك.

التمرين 27 :

1. أحسب :

$$A=\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\cos^2\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\cos^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$

2. نقبل أن : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

أ. أحسب : $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

ب. استنتج $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

التمرين 28 :

1. أنشر : $(x+y)^3$.

2. بين أن : $\cos^6(x)+\sin^6(x)+3\cos^2(x)\sin^2(x)=1$

3. بين أن : $\cos^6\left(\frac{\pi}{12}\right)+\cos^6\left(\frac{5\pi}{12}\right)+3\sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)\sin^2\left(\frac{11\pi}{8}\right)=1$

التمرين 29 : بسط العددين التاليين :

$$A=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(x-2\pi)+\cos(x+\pi)$$

$$B=\cos\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)+\sin(31\pi-x)-\sin(x-32\pi)+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

الأولى بكالوريا علوم تجريبية	الحساب المثلثي الجزء الثاني	الأستاذ : الحيان

التمرين 1 :

نضع : $A(x)=\cos(x)\sin(x)$

1.1. أحسب $A\left(\frac{19\pi}{3}\right)$

2.1. بين أن: $A\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=A(x)$ وأن $A(\pi+x)=A(x)$

1.2. بين أن:

$$\forall x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\};\ A(x)=\frac{\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$$

2.2. حل المعادلة: $x\in\left]-\pi,\pi\right];A(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}$

التمرين 2:

$$f(x)=\cos^2(x)+\cos^2(2x)$$

1. أحسب: $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ و $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

1.2. بين أن: $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2$:

$$\boxed{\cos(a+b)\cos(a-b)=\cos^2(a)-\sin^2(b)}$$

2.2. بين: $\forall x\in\mathbb{R};f(x)-1=\cos(x)\cos(3x)$.

1.3. حل المعادلة: $(E):x\in[0,\pi],\ f(x)=1$

2.3. مثل على الدائرة المثلثية صور حلول المعادلة (E).

3.3. حل المتراجحة: $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ f(x)>1$

التمرين 3:

$$A(x)=7\cos^2(x)-6\sqrt{3}\sin(x)\cos(x)+\sin^2(x)+2$$

1.1. بين أن: $\forall x\in\mathbb{R};\ 7\cos^2(x)+\sin^2(x)=4+3\cos(2x)$

2.1. بين أن:

$$\forall x\in\mathbb{R};\ \cos(2x)-\sqrt{3}\sin(2x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$$

2. حل المعادلة: $x\in\mathbb{R};A(x)=9$

3. حل المتراجحة: $x\in\left]-\pi,\pi\right];A(x)>9$

التمرين 4 :

1. بسط: $A=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)$

2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\cos^2(x)+\cos^2(2x)+\cos^2(3x)=1$

3. ليكن $\alpha\in\mathbb{R}$.

أ. بين أن: $\tan(\alpha)=\cot an(\alpha)-2\cot an(2\alpha)$

ب. استنتج قيمة :

$$S=\tan(\alpha)+\frac{1}{2}\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\frac{1}{2^2}\tan\left(\frac{\alpha}{2^2}\right)+\ldots+\frac{1}{2^n}\tan\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$$

التمرين 5 :

1. بين أن $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)=2+\sqrt{3}$

2. بين أن لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$\sin(x)-\sin(3x)+\sin(5x)=\sin(3x)\left(2\cos(2x)-1\right)$$

$$\cos(x)-\cos(3x)+\cos(5x)=\cos(3x)\left(2\cos(2x)-1\right)$$

3. حل في المجال $[0,\pi]$ المعادلة:

$$\frac{\sin(x)-\sin(3x)+\sin(5x)}{\cos(x)-\cos(3x)+\cos(5x)}=2+\sqrt{3}$$

التمرين 6 :

1. أ. تحقق أن: $8-4\sqrt{3}=\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2$

ب. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $2X^2+\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)X+\sqrt{3}=0$

2. ليكن التعبير :

$$P(x)=2\sin(2x)-\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)(\cos x-\sin x)-\left(2+\sqrt{3}\right)$$

أ. أحسب $(\cos x-\sin x)^2$ واستنتج $\sin(2x)$ بدلالة $\cos(x)-\sin(x)$.

ب. حل المعادلة: $x\in\mathbb{R};P(x)=0$

3. أ. بين أن:

$$P(x)=-16\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{24}\right)\times\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{24}\right)\times\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{5\pi}{24}\right)\times\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{7\pi}{24}\right)$$

ب. أدرس إشارة $P(x)$ في المجال $\left[0,\frac{7\pi}{12}\right[$.

التمرين 7 :

1. بين أن: $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2. أحسب $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$

3. حل في $\mathbb{R}$ كلا من المعادلتين :

أ. $\left(\sqrt{3}+1\right)\cos x+\left(\sqrt{3}-1\right)\sin x=2$

ب. $\frac{1+\sqrt{3}\tan(x)}{\sqrt{3}-\tan(x)}=2-\sqrt{3}$

التمرين 9 :

ليكن α عددا من المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ بحيث: $\sin(\alpha)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

1. تحقق من أن : $\cos(\alpha)=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

2. بين أن: $\cos(2\alpha)=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ و استنتج أن α حل للمعادلة : $\cos(4x)-\sin(x)=0$.

3. حل في المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ المعادلة: $\cos(4x)-\sin(x)=0$

ثم استنتج أن $\alpha=\frac{\pi}{10}$

4. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة:

$$\sqrt{10+2\sqrt{5}}\cos(x)+\left(\sqrt{5}-1\right)\sin(x)=2$$

التمرين 9 :

نعتبر التطبيق التالي :

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin(2x)+\sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right)-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

1. تحقق من أن : $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$

2. أ. بين أن :
$$f(x)=\left(\cos(x)+\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)\left(\sin(x)-\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$$
ب. حل في المجال $[0,\pi[$ المعادلة : $f(x)=0$

3. أ. بين أن : $\forall x\in IR;\ f(x)=2\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{16}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$

ب. تحقق من أن : $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right];\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{16}\right)\neq 0$

ج. حل في المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ المتراجحة : $f(x)>0$

التمرين 10 :

1. بين أن : $\forall x\in IR;\cos(x)-\sqrt{3}\sin(x)=2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

2. استنتج أن :
$$\forall x\in IR;\left(\cos(x)-\sqrt{3}\sin(x)\right)^2-2=2\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$$

3. حل في المجال $]-\pi,\pi]$ المعادلة :
$$\left(\cos(x)-\sqrt{3}\sin(x)\right)^2=2+\sqrt{3}$$

التمرين 11:

1. أ. أحسب $\cos(2\alpha)$ ؛ إذا علمت أن : $\sin(\alpha)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

ب. استنتج قيمة α بحيث : $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

2. نعتبر الدالة العددية g بحيث :
$$g(x)=\cos^2(x)+2\sqrt{3}\sin(x)\cos(x)-\sin^2(x)$$
بين أن : $g(x)=\cos(2x)+\sqrt{3}\sin(2x)$

3. حل في ß المعادلة التالية : $g(x)=\sqrt{2-\sqrt{3}}$

التمرين 12 :

1. ليكن a و b عددين حقيقيين . بين أن :
$$\boxed{\cos(a+b)\sin(a-b)=\sin(a)\cos(a)-\sin(b)\cos(b)}$$

2. حل في ß المعادلة التالية :
$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{4}$$
ثم مثل الحلول على الدائرة المثلثية .

3. حل في ß المعادلة التالية :
$$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{-\sqrt{3}+1}{4}$$
ثم مثل الحلول على الدائرة المثلثية .

التمرين 13 : حل في المجال $\left[-\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ المتراجحة :

$$\frac{1}{\cos(x)}\leq\frac{1}{\sin(x)}$$

التمرين 14:

1. نعتبر في ß التعبير التالي :
$$P(x)=2\sqrt{3}\cos^2(x)+\sin(2x)-\sqrt{3}-1$$
أ. بين أن : $P(x)=\sqrt{3}\cos(2x)+\sin(2x)-1$

ب. حل في $]-\pi,\pi]$ المعادلة : $P(x)=0$

ج. حل في $[0,\pi[$ المتراجحة : $P(x)>0$

2. أ. حل في ß المعادلتين التاليتين :
$$(F):\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \quad \text{و} \quad (E):\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$$
ب. نضع :
$$Q(x)=2\sqrt{3}\cos^2(x)+\left(\sqrt{3}-1\right)\sin(2x)-2\sin^2(x)$$
بين أن : $\forall x\in ß:Q(x)=2\left(\cos(x)+\sin(x)\right)\times\left(\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)\right)$

ج. استنتج أن : $Q(x)=4\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

د. حل في $[0,\pi[$ المعادلة: $Q(x)=0$ ثم المتراجحة: $Q(x)<0$

التمرين 15 : نعتبر a عددا حقيقيا بحيث :

$$\sin(a)=\frac{\sqrt{5}-1}{4} \quad \text{و} \quad a\in\left]0,\frac{\pi}{4}\right[$$

1. أ. بين أن : $\cos(2a)=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ ثم أحسب $\cos(4a)$

ب. استنتج أن a حل للمعادلة $\cos(4x)-\sin(x)=0$

2. أ. حل في المجال $[0,\pi[$, المعادلة : $\cos(4x)-\sin(x)=0$

ب. استنتج قيمة a .

ج. استنتج $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ و $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

التمرين 16 : نعتبر الدالة العددية f لمتغير حقيقي حيث :

$$f(x)=3-2\sin^2(x)-\sqrt{3}\sin(2x)$$

1. بين أن: $\forall x\in ß:f(x)=\left(\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)\right)^2$

2. بين أن: $\forall x\in ß:\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)=2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

3. أ. حل المعادلة : $x\in]-\pi,\pi]:2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1$

ب. مثل صور حلول هذه المعادلة على دائرة مثلثية .

4. حل المعادلة : $x\in[0,\pi[:f(x)=1$

التمرين 17 : نضع :

$$\forall x\in ß:f(x)=\sin(2x)+2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1$$

1) أ) بين أن: $\forall x\in ß:f(x)=2\left(\cos(x)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\times\left(\sin(x)-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

ب. حل في المجال $[0,\pi]$ المعادلة : $f(x)=0$

2. أ. بين أن:

$$\forall x\in\mathbb{R}: \sin(2x)-1=2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

ب. استنتج أن:

$$\forall x\in\mathbb{R}: f(x)=4\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

ج. حل في $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ المتراجحة : $f(x)>0$.

التمرين 18 :

1. بين أن: $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

2. أحسب : $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

3. حل في $\mathbb{R}$ كلا من المعادلتين التاليتين :

أ. $\left(\sqrt{3}+1\right)\cos(x)+\left(\sqrt{3}-1\right)\sin(x)=2$.

ب. $\frac{1+\sqrt{3}\tan(x)}{\sqrt{3}-\tan(x)}=2-\sqrt{3}$

التمرين 19 :

1. حل المعادلة : $x\in\mathbb{R}: \sqrt{3}-2\cos(x)=0$

2. حل المعادلة : $\left(x\in[0,2\pi[: \sqrt{3}\sin(x)-\sin(2x)=0\right)$

ومثل صور حلولها على الدائرة المثلثية .

التمرين 20 :

1. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\tan(4x)+\tan(x)=0$.

2. أحسب: $\tan(2x)$ و $\tan(4x)$ بدلالة $\tan(x)$.

3. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $y^4-10y^2+5=0$.

4. استنتج مما سبق قيمة $\tan\left(\frac{k\pi}{5}\right)$ ؛ $k\in\{1,2,3,4\}$

التمرين 21 :

1. حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين : $(E):\cos(5x)=0$

و $(F):16x^4-20x^2+5=0$

2. ليكن α و β الحلين الموجبين للمعادلة (F) بحيث : $\alpha<\beta$.

أ. أحسب $\cos(5x)$ بدلالة $\cos(x)$ وبين أن: $\alpha^2<\frac{3}{4}<\beta^2$.

ب. استنتج $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ ثم أحسب $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

3. حل في المجال $]0,2\pi[$ المتراجحة التالية :

$$2\cos(2x)+2\sqrt{3}\sin(2x)-\left(1+\sqrt{5}\right)\le 0$$

التمرين 22 :

1. حل المعادلة التالية : $x\in\mathbb{R}: \sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)-\sin(x)=0$

2. أ. أثبت أن : $\forall x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{6}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

$$\frac{\cos(3x)+\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)}{\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)-\sin(x)}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$$

ب. حل المتراجحة التالية :

$$x\in[-\pi,\pi] \quad : \quad \frac{\cos(3x)+\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)}{\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)-\sin(x)}>1$$

التمرين 23 : نضع :

$$\forall x\in\mathbb{R}: \quad g(x)=\sqrt{3}\left(4\cos^4(x)+\sin^2(2x)\right)-2\sin(2x)$$

1. أحسب: $g\left(\frac{\pi}{3}\right)$ و $g(\pi)$

2. بين أن: $\forall x\in\mathbb{R}: 4\cos^4(x)=4\cos^2(x)-\sin^2(2x)$

3. أ. بين أن:

$$\forall x\in\mathbb{R}: g(x)=4\cos(x)\left(\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)\right)$$

ب. حل في المجال $]-\pi,\pi]$ المعادلة : $g(x)=0$

4. أ. تحقق أن:

$$\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[; g(x)=4\cos^2(x)\left(\sqrt{3}-\tan(x)\right)$$

ب. حل في $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ المتراجحة $g(x)\ge 0$.

التمرين 24 :

1. أحسب النسب المثلثية للعدد الحقيقي $\frac{\pi}{12}$.

2. نضع : $A(x)=\tan^2(x)+\left(1-\sqrt{3}\right)\tan(x)+\sqrt{3}$.

أ. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $A(x)=2$ ثم مثل الحلول على الدائرة المثلثية

ب. حل في المجال $]-\pi,\pi]$ المتراجحة $A(x)\ge 2$.

ج. حدد إشارة $A\left(\frac{3\pi}{10}\right)$ و $A\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$.

3. نعتبر المعادلة (E) التالية :

$$\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos(2X)-\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin(2X)=2$$

أ. حل في المجال $[0,2\pi]$ المعادلة (E) .

ب. حل في المجال $[0,2\pi]$ المتراجحة :

$$\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos(2X)-\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin(2X)\le 2$$

التمرين 25 : بين أن:

$$\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\};\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{4(n-1)}\right[;\tan(nx)>n\tan(x)$$

التمرين 26 :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة

$$(E):\cos^2(x)-\sqrt{3}\cos(x)\sin(x)-1=0$$

ثم استنتج حلولها في المجال $]-\pi,\pi]$ ومثلها في الدائرة المثلثية .