الأعداد العقدية

تمرين 1

-1 حدد الشكل الجبري لكل من الأعداد العقدية
$$\frac{1}{3-2i} \quad ; \quad \frac{3-2i}{1+i} \quad ; \quad \frac{2i}{2-i}+\frac{(1-2i)^2}{i}$$

-2 أحسب $(1+i)^2$ واستنتج $(1+i)^{230}$

-3 أحسب $\sum_{k=0}^{k=521} i^k$

تمرين 2

في المستوى العقدي نعتبر النقط $A(1)$ و $B(z)$ و $C(-iz)$

-1 نضع $z=x+iy$ حيث $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ و $i\neq z$ و $z\neq 1$

حدد الشكل الجبري للعددين $\frac{1-z}{1+iz}$ و $\frac{1-i\cdot\overline{z}}{i+i\cdot\overline{z}}$

-2 حدد (E) مجموعة النقط B حيث A وB وC نقط مستقيمية

-3 حدد مجموعة النقط B حيث $\frac{1-i\cdot\overline{z}}{i+i\cdot\overline{z}}$ عدد تخيلي صرف.

تمرين 3

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية $-2i\cdot\overline{z}+z=1$ و $(1-i)z-2\overline{z}=1-5i$

و $z\cdot\overline{z}+\overline{z}=4-3i$ و $2|z|^2-z^2=3$

تمرين 4

في المستوى العقدي حدد مجموعة النقط M(z) في كل حالة من الحالتين التاليتين

-1 $|z-1+i|=3$ ‏ -2 $|z-2|=|z+2i|$

تمرين 5

أكتب على الشكل المثلثي الأعداد عقدية $3+i\sqrt{3}$ و $\frac{-1+i}{1+i\sqrt{3}}$ و $\left(1-i\sqrt{3}\right)^{24}$

تمرين 6

نعتبر العددين العقديين $v=\sqrt{6}+i\sqrt{2}$; $u=2-2i$

-1 احسب معيار وعمدة كل من u و v

-2 حدد الكتابة الجبرية والكتابة المثلثية لـ $\frac{u}{v}$ ثم استنتج

$\sin\frac{7\pi}{12}$; $\cos\frac{7\pi}{12}$

تمرين 7

نضع $u=-2+2i$

-1 أحسب معيار و عمدة u

-2 حل جبريا $z^2=u$ و استنتج $\sin\frac{3\pi}{8}$; $\cos\frac{3\pi}{8}$

تمرين 8

نعتبر العدد العقدي $z=1+i\sqrt{3}$

بين أن النقط $A(z)$ و $B(-z)$ و $C(z^2)$ و $D\left(\frac{2}{z}\right)$ متداورة

تمرين 9

-1 ليكن $z_0=\left[1;\frac{2\pi}{5}\right]$. نضع $\alpha=z_0+z_0^4$ و $\beta=z_0^2+z_0^3$

أ- بين أن $1+\alpha+\beta=0$

ب- استنتج أن α و β حلي المعادلة $x^2+x-1=0$

-2 أ- حدد α بدلالة $\cos\frac{2\pi}{5}$

ب- حل المعادلة $x^2+x-1=0$ واستنتج $\cos\frac{2\pi}{5}$

ج- أنشئ النقط $A_0(1)$ و $A_1(z_0)$ و $A_2(z_0^2)$ و $A_3(z_0^3)$ و $A_4(z_0^4)$ و حدد طبيعة $A_0A_1A_2A_3A_4$

تمرين 10

المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$. نعتبر النقط I ; A ; B التي ألحاقها على التوالي هي 1 ; $1-2i$; $-2+2i$. لتكن (C) الدائرة التي أحد أقطارها هو $[AB]$.

(1 أنشئ النقط I ; A ; B.

(2 حدد z_Ω لحق النقطة Ω مركز الدائرة (C). احسب شعاع الدائرة (C).

(3 لتكن D النقطة ذات اللحق $z_D=\frac{3+9i}{4+2i}$.

حدد الشكل الجبري للعدد z_D ثم بين أن النقطة D تنتمي للدائرة (C).

(3 لتكن E، النقطة ذات اللحق z_E، التي تنتمي للدائرة (C) و التي تحقق $\left(\overline{\overrightarrow{\Omega I},\overrightarrow{\Omega E}}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

(4 أ ـ حدد معيار و عمدة العدد $z_E+\frac{1}{2}$.

ب ـ استنتج أن $z_E=\frac{5\sqrt{2}-2}{4}+\frac{5\sqrt{2}}{4}i$

تمرين 11

نضع : $\mathrm{v}=\frac{5-3\mathrm{iz}}{2+\mathrm{iz}}$ لكل z من $\mathbb{C}-\{2\mathrm{i}\}$ و لتكن النقطة $\mathrm{M}(z)$ صورة z في المستوى العقدي.

(1 بين أن: $(\forall z\in\mathbb{C}-\{2i\}),\mathrm{v}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z\in i\mathbb{R}$

(2استنتج مجموعة النقط $\mathrm{M}(z)$ بحيث يكون $\mathrm{v}\in\mathbb{R}$.

تمرين 12

ليكن $(x;\alpha)\in\mathbb{R}^2$

أحسب $S_n=\sum_{k=0}^{n}\cos(x+k\alpha)$ و $C_n=\sum_{k=0}^{n}\sin(x+k\alpha)$

(يمكن حساب C_n+iS_n)

تمرين 13

اختصر الكتابة $C_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)$

تمرين 14

ليكن $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

نعتبر المعادلة (E):

$$z\in\mathbb{C}\quad (1+iz)^3(1-i\tan\alpha)=(1-iz)^3(1+i\tan\alpha)$$

1- ليكن z_0 حل للمعادلة (E)

أ- بين أن $|1+iz_0|=|1-iz_0|$

ب- استنتج أن z_0 عدد حقيقي

2- أ- أحسب $\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$ بدلالة $e^{i\alpha}$

ت- نضع $z=\tan\theta$ حيث $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. استنتج حلول المعادلة (E)

تمرين 15

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة

$(E):\quad z^2+2(1+\cos\theta)z+2(1+\cos\theta)=0$ حيث $\theta\in]-\pi;\pi[$

1- حل المعادلة (E)

2-أحسب معيار و عمدة جدري المعادلة (E) (ناقش حسب قيم θ)

تمرين 16

لكل عدد عقدي مخالف لـ i نضع $u=\frac{\bar z(z-i)}{\bar z+i}$

1- اثبت أن $\forall z\in\mathbb{C}-\{i\}:\arg u\equiv-\arg z+2\arg(z-i)\quad[2\pi]$

و أن $|u|=|z|$

2- بين إذا كان $|z|=1$ فان $u=-i$

3- حدد مجموعة النقط M(z) حيث u تخيلي صرف.

تمرين 17

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) : $z^2+z+1=0$

2) نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة (F): $z^2=\bar z$

أ- بين أنه إذا كان z حلا للمعادلة (F) فإن $z=0$ أو $|z|=1$

ب- بين أن المعادلة (F) تكافئ المعادلة : $z^3=1$ أو $z=0$

3) حل المعادلة (F) في $\mathbb{C}$.

$$(z-1)^6+(z-1)^3+1=0$$

تمرين 18

1- حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة :

$z^2-8z+17=0$.

2- نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ الحدودية

$P(z)=z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i$.

a. بين أن الحدودية $P(z)$ تقبل حلا تخيليا صرفا وحيدا .

b. حدد الأعداد الحقيقية a ; b ; c حيث :

$P(z)=(z+i)(az^2+bz+c)$.

c. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)$

تمرين 19

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: (E) : $z^2+2z+4=0$

2) اكتب حلي المعادلة (E) على الشكل المثلثي.

3) نعتبر في المستوى العقدي النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي $z_A=2$ و $z_B=-1+i\sqrt{3}$ و $z_C=-1-i\sqrt{3}$.

أ ـ بين أن : $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\frac{\pi}{3}}$.

ب ـ استنتج طبيعة المثلث ABC.

تمرين 20

نعتبر في $\mathbb{C}$ الحدودية: $P(z)=z^3+(3-i)z^2+(6-2i)z+4-4i$

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2+2z+4=0$

2) بين أن $z_0=-1+i$ حل للمعادلة : $P(z)=0$

3) أ ـ تحقق من أن: $P(z)=(z+1-i)(z^2+2z+4)$

ب ـ استنتج الحلين الآخرين z_1 و z_2 للمعادلة : $P(z)=0$

ج ـ حدد الترميز الأسي لـ z_0 و z_1 و z_2. (حيث $\Im_m(z_1)>0$).

4) في المستوى العقدي المنسوب إلى م.م.م.م. $(O,\vec{u},\vec{v})$،

نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها هي على التوالي z_0 و z_1 و z_2

بين أن النقط A و B و C مستقيمية

5) نعتبر الدوران R الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{6}$. لتكن $M(z)$ نقطة من المستوى، $(M\neq O)$، و النقطة $M'(z')$ صورتها بالدوران R.

أ ـ بين أن : $\left|\frac{z'}{z}\right|=1$ و $\arg\frac{z'}{z}\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$

ب ـ استنتج أن : $z'=e^{i\frac{\pi}{6}}.z$ (الكتابة العقدية لـ R)

ج ـ حدد لحق كل من A' و B' صورتي A و B بالدوران R

تمرين 21

-1 بين أن $1+e^{i\theta}=2e^{i\frac{\theta}{2}}\cos\frac{\theta}{2}$

-2 $\theta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$. أحسب بدلالة $\tan\theta$ العدد $z=\frac{e^{i2\theta}-1}{e^{i2\theta}+1}$

تمرين 22

بين أن $e^{i\frac{\pi}{11}}+e^{i\frac{3\pi}{11}}+e^{i\frac{5\pi}{11}}+e^{i\frac{7\pi}{11}}+e^{i\frac{9\pi}{11}}=\frac{ie^{-i\frac{\pi}{22}}}{2\sin\frac{\pi}{22}}$

استنتج $\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$

تمرين 23

1) حل في C المعادلة : $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$.

2)نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية C الحدودية :

$$P(z)=z^3-2(\sqrt{3}+i)z^2+4(1+\sqrt{3}i)z-8i$$

أ– احسب $P(2i)$.

ب- حدد العددين b و c بحيث : $P(z)=(z-2i)(z^2+bz+c)$

ج- حل في C المعادلة $P(z)=0$

3)في المستوى العقدي المنسوب إلى م.م.م. $(o,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي :

$z_C=2i$ و $z_B=\sqrt{3}+i$ و $z=\sqrt{3}-i$.

ليكن R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

أ – اكتب على الشكل المثلثي $\frac{z_B}{z_A}$ و $\frac{z_C}{z_B}$

ب – بين أن الكتابة العقدية للدوران R هي: $z'=e^{i\frac{\pi}{3}}z$

ت – بين أن $R(A)=B$ و $R(B)=C$

ج – بين أن الرباعي OABC معين.

تمرين 24

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A و B و C و D و E اللتي ألحاقها على التوالي هي : $z_A=1-i$ و $z_B=3+i$ و $z_C=-3$ و $z_D=2$ و $z_E=-4$.

نعتبر التطبيق f الذي يربط كل نقطة M لحقها z بالنقطة 'M ذات الحق 'z بحيث: $z'=(1+i)z+1$

1) حدد 'A و'B صورتي النقطتين A و B بالتطبيق f على التوالي.

2) أ ـ بين أن 'OMEM متوازي الأضلاع إذا و فقط إذا، كان $z^2-3z+3=0$.

ب ـ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-3z+3=0$.

3) أ ـ عبر عن $z'+4$ بدلالة $z-2$.

ب ـ استنتج أن $|z'+4|=|z-2|^2$ ثم عبر عن $\arg(z'+4)$ بدلالة $\arg(z-2)$.

ج ـ بين أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها D و شعاعها 2 فإن النقط 'M صورة النقطة بالتطبيق f تنتمي إلى دائرة ينبغي تحديد مركزها و شعاعها.

تمرين 25

نعتبر $t\in\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ و المعادلة (E) التالية:

$$(E):\quad z\in\mathbb{C}\quad z^2\cos^2 t-4z\cos t+5-\cos^2 t=0$$

-1 حل المعادلة (E)

-2 المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$

M_1 و M_2 هما صورتا حلي المعادلة (E) في المستوى العقدي

حدد مجموعة النقط M_1 و M_2 عندما يتغير t في $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ و أنشئها في المعلم $(O;\vec{u};\vec{v})$

تمرين 26

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي : $z_A=4+i$; $z_B=4-i$; $z_C=-i$

1. مثل النقط A و B و C

2. لتكن Ω النقطة ذات اللحق 2 . نسمي S صورة النقطة A بالدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$. حدد لحق النقطة S.

1.بين أن النقط B و A و S و C تنتمي إلى نفس دائرة (Γ) ينبغي تحديد مركزها و شعاعها . أرسم (Γ).

تمرين 27

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي هما : $z_A=i$; $z_B=2$

I- حدد لحق النقطة B_1 صورة النقطة B بالتحاكي الذي مركزه A و نسبته $\sqrt{2}$.

1) حدد لحق النقطة 'B' B صورة النقطة B_1 بالدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{4}$.

2) مثل النقط A و B و 'B .

II - نعتبر التطبيق f الذي يربط كل نقطة M لحقها z بالنقطة 'M ذات الحق 'z بحيث: $z'=(1+i)z+1$.

1) حدد 'A و'B صورتي النقطتين A و B بالتطبيق f على التوالي.

2) أ ـ بين أنه $\frac{z'-z}{i-z}=-i$ لكل z مخالف للعدد i.

ب ـ بين أن : $\begin{cases} MM'=MA \\ (\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MM'})\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ لكل نقطة M مخالفة للنقط A.

ج ـ استنتج طريقة لإنشاء النقطة 'M انطلاقا من النقطة M حيث $M\neq A$.

3) حدد (Γ) مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث : $|z-2|=\sqrt{2}$.

4) أ ـ بين أن : $z'-3-2i=(1+i)(z-2)$ لكل عدد عقدي z.

ب ـ استنتج أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى (Γ) فإن النقطة 'M تنتمي إلى دائرة ينبغي تحديد مركزها و شعاعها

تمرين28

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O\ ;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\ \right)$ ، نعتبر النقط :

النقطة A ذات اللحق $a=7-i\sqrt{3}$.

النقطة B ذات اللحق $b=5+3i\sqrt{3}$.

النقطة Q منتصف القطعة [OB] .

1) أ ـ ليكن R الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$. حدد الكتابة العقدية للدوران R .

ب ـ بين أن $R(A)=B$ ثم استنتج طبيعة المثلث OAB.

2) حدد q لحق النقطة Q .

3) حدد k لحق النقطة K بحيث يكون ABQK متوازي الأضلاع .

4) بين أن $\frac{k-a}{k}$ تخيلي صرف . ما ذا نستنتج بالنسبة للمثلث OKA ؟

5) لتكن C النقطة ذات اللحق $c=\frac{2a}{3}$ ؟

أ ـ أحسب $\frac{k-b}{k-c}$.

ب ـ ما ذا نستنتج بالنسبة للنقط B و C و K ؟

تمرين 29

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$. لتكن $A(-2+3i)$ و $B(1-3i)$ نقطتين.

نعتبر $M(z)$ حيث $z\neq -2+3i$ نضع $z'=\frac{z-1+3i}{z+2-3i}$

-1 أ- حدد علاقة بين عمدة z' و الزاوية الموجهة $\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right)$

ب- حدد و أنشئ المجموعتين

$$(E_1)=\left\{M(z)/\arg(z')\equiv\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]\right\}$$

$$(E_2)=\left\{M(z)/|z'|=2\right\}$$

-2 حدد لحق النقطة المشتركة K للمجموعتين E_1 و E_2

تمرين30

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية كل من المعادلتين التاليتين

أ ـ $z^4=1$ (يمكن ملاحظة أن $z^4-1=(z^2-1)(z^2+1)$)

ب ـ $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^4=1$

2) ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم و ليكن A عددا عقديا .

نعتبر المعادلة ذات المجهول العقدي z :

$$(E):\ \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n=A\ .$$

P و Q و M هي النقط ذات الألحاق i و $-i$ و z على التوالي.

أ ـ بين أنه إذا كان z حل للمعادلة (E) فإن $\frac{MP}{MQ}=\sqrt[n]{|A|}$

ب ـ بين أنه إذا كان للمعادلة (E) حل حقيقي على الأقل فإن $|A|=1$.

ج ـ استنتج أنه إذا كان للمعادلة (E) حل حقيقي فإن جميع حلولها حقيقية .

تمرين31

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم . $\left(O\ ;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\right)$. نعتبر النقطتين A و B اللتان لحقاهما على التوالي هما : $z_A=1$; $z_B=-2$.

نربط كل عدد عقدي z مخالف ل -2 بالعدد Z المعرف ب : $Z=\frac{z-1}{z+2}$.

1) حدد مجموعة النقط M ذات اللحق z في كل من الحالتين التاليتين :

أ ـ $|Z|=1$ ب ـ $Z\in\mathbb{R}$

2) أ ـ بين أنه لكل z مخالف ل -2 لدينا : $(Z-1)(z+2)=-3$

ب ـ نعتبر النقطة M ذات اللحق z و النقطة M' التي لحقها Z .

بين أن : $M'\neq A$ ثم حدد $AM'\times BM$ و $\overline{\left(\vec{u},\overrightarrow{AM'}\right)}+\overline{\left(\vec{u},\overrightarrow{BM}\right)}$

ج ـ علما أن النقطة M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها B و شعاعها 3 بين أن M' تنتمي إلى دائرة ينبغي تحديد مركزها و شعاعها .

3) أ ـ حدد (Γ) مجموعة النقط M ذات اللحق z حيث $Z\in i\mathbb{R}$.

ب ـ لكل عدد حقيقي غير منعدم x نضع $d=\frac{1+2ix}{1-ix}$ و نسمي D النقطة ذات اللحق d. حدد الشكل الجبري للعدد $\frac{d-1}{d+2}$ ثم استنتج أن النقطة D تنتمي ل (Γ) .

ج ـ ليكن θ عنصرا من المجال $]-\pi,\pi[$. نضع $f=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{i\theta}$ و نسمي F النقطة ذات اللحق f .

* بين أن العدد $U=\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$ تخيلي صرف .

* بين أن $\frac{f-1}{f+2}=U$. ماذا نستنتج بالنسبة للنقطة F ؟