

الأستاذ : الحيان	النهايات والإتصال	الأولى بكالوريا علوم تجريبية
<p>أحسب النهايات التالية :</p> <p>التمرين 5 :</p> $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} : (vii) ; \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( 1 - \cos \left( \frac{1}{x} \right) \right) : (i)$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cos \left( \frac{1}{x} \right) : (viii) ; \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \left( \frac{1}{x} \right) : (ii)$ $\lim_{x \rightarrow 0} \tan \left( \sqrt{x^2 + \frac{\pi^2}{4}} - \frac{\pi}{4} \right) : (ix) ; \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos x - \sqrt{3} \sin x}{x - \frac{\pi}{6}} : (iii)$ $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \left( \pi \frac{\sin x}{x} \right) : (x) ; \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{x - \frac{\pi}{2}} : (iv)$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{1 - \cos x}} : (xi) ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} : (v)$ $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left( 1 - \cos \left( \frac{1}{x} \right) \right) : (xii) ; \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{(2x - \pi)^2} : (vi)$	<p>أحسب النهايات التالية :</p> <p>التمرين 1 :</p> $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x-1} : (vii) ; \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - 2x} : (i)$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+8} - 3}{x^5 - 5x + 6} : (viii) ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x - 4}{2x^2 - 2x} : (ii)$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} : (ix) ; \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 2}{3x^2 - 6x} : (iii)$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x} : (x) ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 3\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 1} : (iv)$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + x} : (xi) ; \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x^2+4} - 4}{x-2} : (v)$ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} : (xii) ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{4x^2+5} - 3} : (vi)$	<p>أحسب النهايات التالية :</p> <p>التمرين 2 :</p> $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} : (vii) ; \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-1}{ x-2 } : (i)$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+2x}{x^2-x} : (viii) ; \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-2x}{(x+3)^2} : (ii)$ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x : (ix) ; \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{4-2x}{x^2-4x+4} : (iii)$ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x : (x) ; \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x^2+5x-6}{x^3-4x} : (iv)$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1+2\sqrt{1-x}}{(x-1)(1-\sqrt{1-x})} : (xi) ; \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^3+x}{x^2-1} : (v)$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+ x }} : (xii) ; \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} - \frac{x^2}{x^2-1} : (vi)$
<p>أحسب النهايات التالية :</p> <p>التمرين 6 :</p> $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{(x+3)^2} : (vii) ; \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - 2x^2 : (i)$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^2+x} + 2}{x} : (viii) ; \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2+x+1}{x+2} : (ii)$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+3}{x+1} - x : (ix) ; \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x^2-x} - 2 : (iii)$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+\cos x}{2x} : (x) ; \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{\sqrt{2-x}} : (iv)$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} : (xi) ; \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2-2x} + x - 1 : (v)$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-9}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} : (xii) ; \lim_{x \rightarrow \infty} x + \sin x : (vi)$	<p>أحسب النهايات التالية :</p> <p>التمرين 3 :</p> $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} : (v) ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2-x)}{x-1} : (i)$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1} : (vi) ; \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{6}} : (ii)$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(\sqrt{x})}{\sin x} : (vii) ; \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\tan(x^2-3x)}{x-3} : (iii)$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{x^3} : (viii) ; \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 3x} : (iv)$	<p>أحسب النهايات التالية :</p> <p>التمرين 4 :</p> $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\tan x} : (ii) ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 2x} : (i)$
<p>أحسب النهايتين التاليتين :</p> <p>التمرين 7 :</p> $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 \left( \frac{x}{3} \right)} : (ii) ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{x^2} : (i)$ <p>التمرين 8 :</p> <p>نعتبر الدالة العددية <math>f</math> المعرفة على <math>I = \mathbb{R}^{+*} - \{1\}</math> بما يلي :</p> $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{2}}{x - \sqrt{x}}$ <ol style="list-style-type: none"> <li>أحسب النهاية : <math>\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)</math></li> <li>أحسب النهاية : <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)</math></li> <li>أحسب النهاية : <math>\lim_{x \rightarrow 1} f(x)</math></li> </ol>		

ب- استنتج :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

### التمرين 11 :

1. لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة بما يلي :  $f(x) = \frac{2x - \sin x}{-x + 3}$

أ- بين أن :  $\forall x > 3 : \frac{2x + 1}{-x + 3} \leq f(x) \leq \frac{2x - 1}{-x + 3}$

ب- استنتج :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2. لتكن  $g$  الدالة العددية المعرفة بما يلي :  $g(x) = \frac{x^2 + \cos x}{2x}$

أحسب النهايتين :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

التمرين 12 : لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$f(x) = \cos(\pi x) + \sin(\pi x) ; x \in [-1, 1[$

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x} - 2} ; x \notin [-1, 1[$

1. حدد  $D$  حيز تعريف الدالة  $f$ .

2. أ- أحسب :  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  و  $f\left(\frac{3}{4}\right)$  و  $f\left(-\frac{2}{3}\right)$  و  $f\left(-\frac{5}{2}\right)$

ب- حل في  $[-1, 1[$  : المتراجحة :  $f(x) > 1$

ج- حل في  $[-1, 1[$  : المعادلة :  $(f(x))^2 = 1$

3. بين أن  $f$  متصلة في النقطة 1.

4. أحسب النهايات التالية :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x > 4}} f(x)$  و  $\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} f(x)$

5. لتكن  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $D - \{1\}$  كما يلي :

$$g(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

أ- تحقق من أن :

$\forall x \in \mathbb{R}^+ : x + \sqrt{x} - 2 = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)$

ب- أحسب :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} g(x)$

ج- بين أن :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} g(x) = -\pi$  (ضع :  $t = x - 1$ )

التمرين 13 :  $f$  و  $g$  دالتان عدديتان معرفتان بما يلي :

$$f(x) = \frac{x^2}{1 - \sqrt{1 - |x|}} ; g(x) = \frac{x^2}{1 - \sqrt{|x|} - 1}$$

1. حدد  $D_f$  و  $D_g$  مجموعتي تعريفي  $f$  و  $g$  على التوالي .

2. بين أن  $f$  تقبل تمديدا بالإتصال في النقطة  $x_0 = 0$

3. أحسب النهايتين :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  و  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} g(x)$

التمرين 14 : لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} ; x \neq 1 \\ f(1) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

لاحظ أن :  $x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)$

ب- استنتج تمديدا بالإتصال للدالة  $f$  عند العدد  $x_0 = 1$

التمرين 9 : نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right)}{1 - \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right)}$$

1. حدد  $D$  حيز تعريف الدالة  $f$ .

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$$

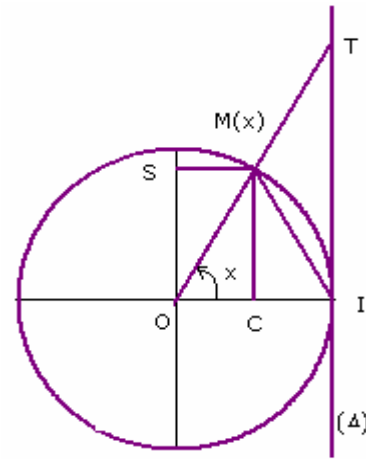
2. بين أن :  $\forall x \in D : f(x) = \frac{\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)}{2\left[1 - \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right)\right]}$

أ- أحسب  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} f(x)$  . (يمكن استعمال :  $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ )

ب- استنتج أن  $f$  تقبل تمديدا بالإتصال في النقطة  $x_0 = \frac{\pi}{3}$  وحدده .

ج- حدد في المجموعة  $[0, \pi] \cap D$  : المتراجحة :  $f(x) > 1$

### التمرين 10 :



1. أحسب  $\mathcal{Q}_1$  و  $\mathcal{Q}_2$  و  $\mathcal{Q}$  مساحات المثلثين  $OIM$  و  $OIT$  والقطاع الدائري  $OIM$  على التوالي .

2. بين أن :  $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[ : \sin x \leq x \leq \tan x$  (1)

3. باستعمال العلاقة (1) ؛ بين أن :

(2) :  $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[ : \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$

4. تحقق من أن العلاقة (2) تظل صحيحة من أجل  $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$

5. استنتج النهايتين :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

6. أ- بين أن :  $\forall x \in \mathbb{R}^* : \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \right]^2$

1. أدرس اتصال الدالة  $f$  في النقطة 1 .

2. أدرس قابلية اشتقاق الدالة  $f$  في النقطة 1 .

**التمرين 15 :** لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x & ; x < -1 \\ \frac{3x^2 + 8}{x^2 + 1} & ; -1 \leq x < 1 \\ \sqrt{x^2 + 8} + 2 & ; x \geq 1 \end{cases}$$

1. أدرس اتصال الدالة  $f$  في النقط : -1 و 0 و 1 .

2. بين أن الدالة  $f$  متصلة على  $\mathbb{R}$  (معللا جوابك)

**التمرين 16 :** لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{\sqrt{x^2 + 5} - 3}$$

1. حدد  $D$  حيز تعريف الدالة  $f$  وأحسب :  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

2. أعط تمديدا بالإتصال للدالة  $f$  في النقطة  $x_0 = -2$

**التمرين 17 :** لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + a - 3 & ; x < 0 \\ \frac{\sin(2x)(1 - \cos x)}{x^3} & ; x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. أ- أحسب :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ب- حدد العدد الحقيقي  $a$  علما أن الدالة  $f$  متصلة على اليسار في 0 .

2. بين أن  $f$  متصلة على اليمين في النقطة 0 .

3. ما هي قيمة العدد الحقيقي  $a$  التي من أجلها تكون  $f$  متصلة في 0 .

**التمرين 18 :** لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 3x & ; x \leq -1 \\ x^2 + x + 4 & ; -1 < x \leq 1 \\ \frac{x - 2}{x^2 - 3x + 2} & ; x > 1 \end{cases}$$

1. حدد  $D$  حيز تعريف الدالة  $f$

2. بين أن  $f$  متصلة في النقطة (-1)

3. هل الدالة  $f$  متصلة في النقطة 1 ؟

4. بين أن  $f$  تقبل تمديدا بالإتصال في النقطة 2 وعرف هذا التمديد .

**التمرين 19 :** لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \frac{\sqrt{4 + \cos x} - 2}{x^2}$$

1. بين أن :  $\forall x \in \mathbb{R}^* : |f(x)| \leq \frac{1}{x^2}$

2. حدد النهايتين :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

**التمرين 20 :**

لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة بما يلي :  $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+4}}$

1. بين أن :  $\forall x \in ]4, +\infty[ : 1 \leq f(x)$

2. بين أن :  $\forall \epsilon \in ]0, +\infty[ : f(x) \leq 1 + \frac{1}{x}$

3. أحسب :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

**التمرين 21 :**

1. حدد حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  النهاية التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - 1 + mx)$$

2. حدد حسب قيم الوسيط الحقيقي  $a$  النهاية التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{ax}{(x^2-1)^2} \right)$$

3. حدد حسب قيم الوسيطين الحقيقيين  $a$  و  $b$  النهاية التالية :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-a)(x-b)}{x^2+x}$$

**التمرين 22 :** لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \frac{(1 - \tan x)^2}{1 + \cos(4x)}$$

1. حدد  $D$  حيز تعريف الدالة  $f$

2. نضع :  $I = \left] 0, \frac{\pi}{4} \right[ \cup \left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$

أ- بين أن :

$$\forall h \in I : f\left(\frac{\pi}{4} - h\right) = \frac{2 \tan^2 h}{(1 + \tan^2 h) \sin^2 2h}$$

ب- بين أن  $f$  تقبل تمديدا بالإتصال في النقطة  $\frac{\pi}{4}$

**التمرين 23 :** لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - (x + 1)$$

1. أحسب :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2. نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  بما يلي :  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$

أ- بين أن :  $\forall x \in \mathbb{R}^* : g(x) + 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + 1}$

تحقق من أن :  $\forall x \in \mathbb{R}^* : \sqrt{x^2 + 1} + 1 > 2$

ب- استنتج أن :  $\forall x \in \mathbb{R}^* : |g(x) + 1| \leq \frac{1}{2}|x|$

ج- أحسب  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  ؛ ثم استنتج أن  $g$  تقبل تمديدا بالإتصال في النقطة 0 ينبغي تحديده .

**التمرين 24 :** لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$$

1. حدد  $D$  حيز تعريف الدالة  $f$

2. أثبت أن :  $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} : f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}}$

3. أحسب النهاية :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$