الثانوية التأهيلية أولاد صالح	الحساب التكاملي	السنة الدراسية: 2010/2009.
الأستاذ: محمد حمدان	سلسلة التمارين	المستوى: 2 باك علوم الحياة و الأرض

تمرين 01

أحسب التكاملات التالية: $\int_0^1 (2x-1)\,dx$ ؛ $\int_1^{\sqrt{2}}\left(x^2-\sqrt{2}x\right)dx$ ؛

$\int_1^2\left(\frac{3x^2+x-1}{x^4}\right)dx$ ؛ $\int_1^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}\right)dx$ ؛ $\int_0^1 e^{-x}\,dx$ ؛

$\int_1^2\left(4x^3+x-1\right)dx$ ؛ $\int_0^1 e^{-x}\left(e^{3x}+1\right)dx$ ؛ $\int_0^1\left(e^{2x}-e^x\right)dx$ ؛

$\int_0^{\ln 2}\left(\frac{e^{2x}+e^x+1}{e^x}\right)dx$ ؛ $\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{\left(e^x-1\right)^2}{e^x}dx$ ؛ $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$ ؛

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)dx$ ؛ $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{\sin x}\,\cos x\right)dx$ ؛ $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin x}{\cos^4 x}\right)dx$ ؛

$\int_0^{\pi}\cos x.\cos 2x\,dx$ ؛ $\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin 2x.\cos x\,dx$ ؛ $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\sin x\right)dx$ ؛

$\int_0^{\pi}\cos x.\sin^2 x\,dx$ ؛ $\int_0^{\pi}\sin x.\cos^3 x\,dx$ ؛ $\int_0^1\left(2^{5x}\right)dx$ ؛

$\int_1^2\left(x+\frac{1}{x}\right)dx$ ؛ $\int_0^1\sqrt[3]{x}\,(x+1)\,dx$ ؛ $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^3 x\right)dx$ ؛

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)dx$ ؛ $\int_{-1}^1\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$ ؛ $\int_1^2\frac{x^2-2x}{\sqrt{3x^2-x^3}}dx$ ؛

$\int_1^2\frac{x}{\left(3x^2-2\right)^3}dx$ ؛ $\int_3^4\frac{x^2+x-2}{x^3-2x^2}dx$ ؛ $\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{1}{x}\left|\ln x\right|dx$ ؛

$\int_1^3\frac{|x-2|}{\left(x^2-4x\right)^2}dx$ ؛ $\int_{-1}^3\left|x^2-2x\right|dx$ ؛ $\int_{-1}^1\left|e^x-1\right|dx$ ؛

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}\left|\sin 2x\right|dx$ ؛ $\int_0^1 x\sqrt{3+x^2}\,dx$ ؛ $\int_1^2\left(x+\frac{1}{x^2}\right)dx$ ؛

$\int_1^2\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ ؛ $\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ ؛ $\int_0^1\frac{x^2}{\left(x^3+1\right)^2}dx$ ؛

؛ $\int_0^1 x\left(x^2+2\right)^4dx$ ؛ $\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx$ ؛ ؛ $\int_1^e\frac{\left(1+\ln x\right)^2}{x}dx$.

تمرين 02

1) بين أن: $\cos^4 x=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$ ثم أحسب: $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^4 x\right)dx$.

2) بين أن: $\cos^4 x-\sin^4 x=\cos 2x$ ثم أحسب: $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin^4 x\right)dx$.

تمرين 03

I) نعتبر التكاملين: $I=\int_0^{\pi}x\cos^2 x\,dx$ و $J=\int_0^{\pi}x\sin^2 x\,dx$.

1. أحسب $I+J$ و $I-J$.
2. استنتج قيمة كل من I و J.

II) نعتبر التكاملين: $A=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin x}$ و $B=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x\,dx$.

1. أحسب التكامل B.
2. أحسب $A-B$ و استنتج قيمة A.

تمرين 04

1. (تذكير: $\int_a^b(f+g)(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$)

أحسب التكاملات التالية: $\int_1^e\frac{1+\ln x}{x}dx$ ؛ $\int_1^e\left(1+\ln\frac{1}{t}\right)dt+\int_1^e\ln t\,dt$ ؛

$\int_2^3\ln(1+t)\,dt+\int_3^2\ln(1+t)\,dt$ ؛ $\int_1^{\frac{\pi}{6}}\sin(2t)\,dt-\int_1^{\frac{7\pi}{6}}\sin(2t)\,dt$ ؛

2. (تذكير: $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$

إذا كان $d°P\geq d°Q$ فإنه لحساب $\int_a^b\frac{P(x)}{Q(x)}$ يمكن القيام بالقسمة الأقليدية لـ $P(x)$ على $Q(x)$)

أحسب التكاملات التالية: $\int_1^3\left|x^2-2x\right|dx$ ؛

$\int_0^{\sqrt{2}}\frac{x^3+2x+1}{x^2+1}dx$ ؛ $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin(6\pi x+1)\,dx$ ؛

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin^2 x\right)dx$ ؛ $\int_0^{\pi}\left(\cos^3\theta\right)d\theta$ ؛ $\int_0^{\pi/3}\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}d\theta$.

3. باستعمال المكاملة بالأجزاء: (تذكير: $\int_a^b f'(x)g(x)\,dx=\left[f(x).g(x)\right]_a^b-\int_a^b f(x)g'(x)\,dx$)

، أحسب التكاملات التالية: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx$ ؛ $\int_1^e x\ln x\,dx$ ؛

$\int_{-1}^0 x\sqrt{4-x}\,dx$ ؛ $\int_{-1}^0 x^5e^{x^3}dx$ ؛ $\int_0^1 x^3e^{x^2}dx$ ؛

$\int_1^e\left(\ln x\right)^2dx$ ؛ $\int_{\sqrt{e}}^2\frac{\ln(x)}{x^2}dx$ ؛ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\left(\ln(1+\cos x)\right)dx$

$\int_0^{e-1}(x+1)^2\ln(x+1)\,dx$ ؛ $\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$ ؛ $\int_0^1 xe^x\,dx$.

4. (تذكير: $\int_a^b u^r(x)u'(x)\,dx=\left[u(x)\right]_a^b\ ;r\in\mathbb{Q}\setminus\{-1\}$)

أحسب التكاملات التالية: $\int_1^2\left(x^2+\sqrt[3]{x}\right)dx$ ؛ $\int_0^1 x\left(x^2+\sqrt{6}\right)^4dx$

$\int_2^3\sqrt{4x-1}\,dx$ ؛ $\int_0^3\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3x+5}}dx$ ؛ $\int_1^e\left(\frac{\ln^2(x)}{x}\right)dx$ ؛

$\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\left(1-\cos x\right)^2}dx$ ؛ $\int_0^{\pi}\left(1+\sin x\right)^3\cos x\,dx$

5. (تذكير: $\int_a^b\frac{u'(x)}{u(x)}dx=\left[\ln\left|u(x)\right|\right]_a^b$)

أحسب التكاملات التالية: $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\tan x\right)dx$ ؛ $\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{1+e^x}dx$ ؛

$\int_{-1}^{-2}\frac{x-1}{x^2-2x}dx$ ؛ $\int_0^1\frac{x}{x+1}dx$ ؛ $\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin 2x}{4+\cos^2 x}\right)dx$.

6. (تذكير: $\int_a^b u'(x)e^{u(x)}dx=\left[e^{u(x)}\right]_a^b$)

أحسب: $\int_0^1 e^{6x+1}dx$ ؛ $\int_0^1 xe^{x^2+1}dx$ ؛ $\int_1^4\frac{e^{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ ؛ $\int_{1/2}^1\frac{5+e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$

تمرين 05

نعتبر: $I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$ و $J=\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx$ و $K=\int_0^1\sqrt{x^2+2}\,dx$

1. نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;1]$ بما يلي:
$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$. أحسب $f'(x)$ ثم استنتج قيمة: I.

2. أ- تحقق من أن: $J+2I=K$.

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء على: K ، بين أن: $K=\sqrt{3}-I$.

جـ- استنتج قيمة كل من K و J.

تمرين 06

1. أ)حدد العددين a و b لكي يكون $\frac{1}{e^x-1}=a+\frac{b\,e^x}{e^x-1}$ $\left(\forall x\in\mathbb{R}^*\right)$.

ب) استنتج حساب $I=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{dx}{e^x-1}$.

2. أ) حدد العددين a و b لكي يكون

$\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x-1}$ $\left(\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1;2\}\right)$.

ب) استنتج حساب $J=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2-3x+2}$.

تمرين 07

نعتبر التكامل التالي: $I_n=\int_0^1 x^n e^x\,dx \quad ,n\in\mathbb{N}$.

1. أحسب I_1.

2. بين باستعمال المكاملة بالأجزاء أن:
$(\forall n\in\mathbb{N}):\quad I_{n+1}=e-(n+1)I_n$.

3. أحسب I_2 و I_3.

4. استنتج قيمة التكامل: $\int_0^1\left(x^3+2x^2-2x\right)e^x\,dx$.

تمرين 08

لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ المتتالية المعرفة بما يلي: $u_n=\int_0^2\left(\frac{2t+3}{t+2}\right)e^{\frac{t}{n}}\,dt$.

1. لتكن φ الدالة المعرفة على $[0;2]$ بما يلي: $\varphi(t)=\frac{2t+3}{t+2}$.

أ- أدرس تغيرات الدالة φ على المجال $[0;2]$.

ب- - استنتج أن: $\frac{3}{2}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)\leq u_n\leq\frac{7}{4}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)$.

جـ- بين أنه إذا كانت $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة نهايتها ℓ فإن: $3\leq\ell\leq\frac{7}{2}$.

2. أ- تحقق من أن: $(\forall t\in[0;2]);\quad \frac{2t+3}{t+2}=2-\frac{1}{t+2}$.

ب- استنتج قيمة $I=\int_0^2\left(\frac{2t+3}{t+2}\right)dt$.

جـ- بين أن: $(\forall t\in[0;2]);\quad 1\leq e^{\frac{t}{n}}\leq e^{\frac{2}{n}}$.

ثم استنتج أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\quad I\leq u_n\leq e^{\frac{2}{n}}I$.

د- استنتج أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة محددا نهايتها.

تمرين 09

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=\frac{1+e^{2x}}{\left(1+e^x\right)^2}$.

و (C_f) منحناها في م م م $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1. بين أن f دالة زوجية و تحقق أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.

2. علما أن: $f'(x)=\frac{2e^x\left(e^x-1\right)}{\left(1+e^x\right)^3}$ أدرس إشارة $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات f.

3. لتكن $F(x)=\frac{-2e^x}{1+e^x}+x\quad (x\in\mathbb{R});$ أحسب $F'(x)$.

4. أحسب مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و المستقيمات $y=1$ و $x=\ln 2$ و $x=-\ln 2$.

تمرين 10

لتكن $f(x)=\begin{cases} x\,e^{-\frac{x^2}{2}+1} & x\leq 0\\ \frac{x+2}{x}e^{-\frac{x}{2}} & x\succ 0\end{cases}$ و (C_f) منحناها في م م م $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1. أ-تحقق أن: $F(x)=-\frac{x+4}{x}e^{-x}$ هي دالة أصلية للدالة f^2 على $\mathbb{R}^{+*}$.

ب- ليكن $\lambda\succ 1$ ، أحسب بـ cm^3 الحجم $\mathcal{V}(\lambda)$ للمجسم المولد بالدوران حول محور الأفاصيل للشكل المحدد بمحور الأفاصيل و (C_f) و المستقيمين $x=1$ و $x=\lambda$ ثم أحسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\mathcal{V}(\lambda)$.

2. حدد بـ cm^2 مساحة السطح المستوي المحصور بـ (C_f) و محوري المعلم و المستقيم $x=-1$.

تمرين 11

لتكن $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$ و (C_f) منحناها في م م م $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1. أحسب $A=\int_1^e\frac{dx}{x}$ و $B=\int_1^e(\ln x)\,dx$

2. أحسب مساحة الحيز المستوي المحصور بين (C_f) و محور الافاصيل و المستقيمين $x=1$ و $x=e$.

3. بين أن: $F(x)=x\left[(\ln x)^2-2\ln x+2\right]$ هي دالة أصلية للدالة $g(x)=(\ln x)^2$.

4. ليكن $\lambda\in]0;1[$: أ) أحسب $C=\int_\lambda^1\left(\frac{\ln x}{x}\right)dx$ و $D=\int_\lambda^1(\ln x)^2\,dx$.

ب- أحسب بدلالة λ ، الحجم $\mathcal{V}(\lambda)$ للمجسم المولد بدوران منحنى قصور f على $[\lambda;1]$ دورة كاملة حول محور الأفاصيل. ثم أحسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\mathcal{V}(\lambda)$.

تمرين 12

نعتبر f المعرفة بـ: $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$. بين أن: $(\forall x\geq 1)$: لدينا $\frac{1}{2x^2}\leq\frac{1}{x^2+1}\leq\frac{1}{x^2}$ ثم استنتج تأطيرا للتكامل: $\int_1^2 f(x)\,dx$.