ملخص للاشتقاق

1- الاشتقاق في نقطة

أ- تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة في مجال مفتوح مركزه x_0

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق في x_0 اذا كانت للدالة $x \to \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نهاية l في x_0 ونرمز لها

بـ $f'(x_0)$. العدد l يسمى العدد المشتق لـ f في x_0. نكتب $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

ملاحظة: $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

ب) مثال: نعتبر $f(x)=x^2+2x$

بين أن f قابلة للاشتقاق في 1 و حدد العدد المشتق في 1

ج) الدالة التألفية المماسة لدالة

لتكن f قابلة للاشتقاق في x_0

لدينا $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نضع $\varepsilon(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)$ ، $\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$

$\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$ / $\varepsilon(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\Leftrightarrow f(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)+(x-x_0)\varepsilon(x)$

أي أنه بجوار x_0 لدينا $f(x)\simeq f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

الدالة $x\to f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ تسمى الدالة التألفية المماسة لدالة f في النقطة x_0

تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة في مجال مفتوح مركزه x_0

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق في x_0 فان الدالة التألفية المماسة لدالة f في النقطة x_0 هي الدالة

$g: x\to f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

تمرين نعتبر $f(x)=\sqrt{x}$

1) حدد الدالة التألفية المماسة لدالة f في النقطة 1

2) استنتج قيمة مقربة لكل من $\sqrt{0,99}$ و $\sqrt{1,001}$

2 – الاشتقاق على اليمين - الاشتقاق على اليسار

أ- تعريف

* لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $[x_0;x_0+\alpha[$ حيث $\alpha\succ 0$

نقول إن f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 إذا كانت للدالة $x\to\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نهاية l على اليمين في x_0 و نرمز لها بـ $f_d'(x_0)$.

العدد l يسمى العدد المشتق لـ f على اليمين في x_0 نكتب $f'_d(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

* لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $]x_0-\alpha;x_0]$ حيث $\alpha\succ 0$

نقول إن f قابلة للاشتقاق على اليسار في x_0 إذا كانت للدال $x\to\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نهاية l على اليسار في x_0 نرمز لها ب $f_g'(x_0)$.

العدد l يسمى العدد المشتق لـ f على اليسار في x_0 نكتب $f'_g(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

ب – خاصية

تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار في x_0 والعدد المشتق على اليمين يساوي العدد المشتق على اليسار.

تمرين نعتبر $f(x)=x^2+|x|$ أدرس قابلية اشتقاق f في0

3- الاشتقاق و الاتصال

خاصية

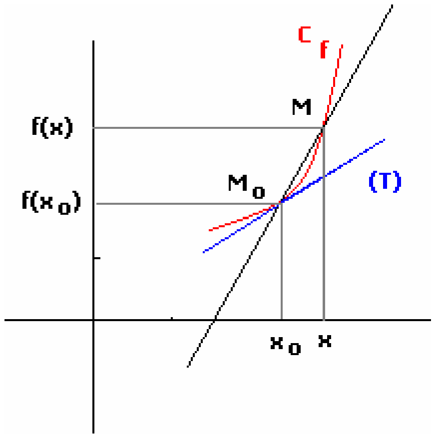
كل دالة قابلة للاشتقاق في x_0 تكون متصلة في x_0

ملاحظة: عكس هذه الخاصية غير صحيح

(كما يوضح المثال السابق الدالة f متصلة في 0 و مع ذلك غير قابلة للاشتقاق في0)

4- التأويل الهندسي – معادلة المماس لمنحنى دالة

أ- المماس



لتكن f قابلة للاشتقاق في x_0 و C_f منحناها

نعتبر $M_0(x_0;f(x_0))$ و $M(x;f(x))$ نقطتين من C_f

المعامل الموجه للمستقيم (MM_0) هو $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

نلاحظ عندما تقترب M من M_0 (أي x تؤول إلى x_0) فان $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ تؤول إلى $f'(x_0)$

و بالتالي المستقيم (MM_0) يدور حول M_0 إلى أن ينطبق مع المستقيم (T) ذا المعامل الموجة $f'(x_0)$

المستقيم (T) مماس للمنحنى C_f

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 و C_f منحناها

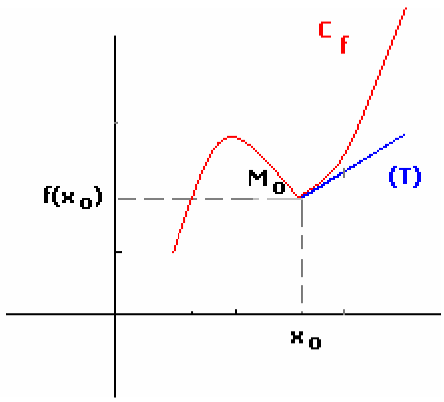
قابلية اشتقاق f في x_0 تؤول هندسيا بوجود مماس لـ C_f عند النقطة ذات الأفصول x_0 معادلته

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

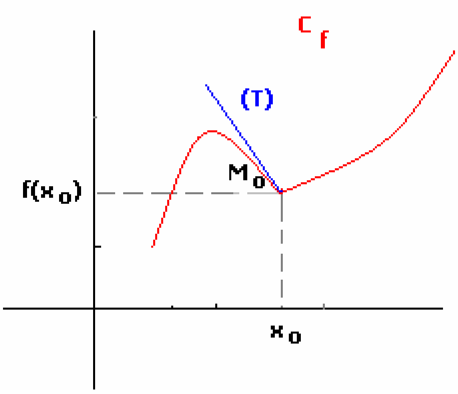
تمرين: نعتبر $f(x)=x^3$

أدرس قابلية اشتقاق f في 2 و حدد معادلة المماس للمنحنى عند النقطة ذات الأفصول2

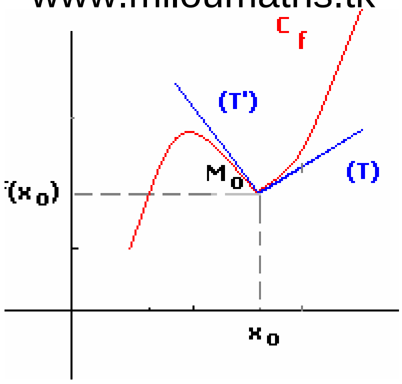
ب- نصف المماس



$$\begin{cases}(T): y=f_d'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\\ x\geq x_0\end{cases}$$



$$\begin{cases}(T): y=f_g'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\\ x\leq x_0\end{cases}$$



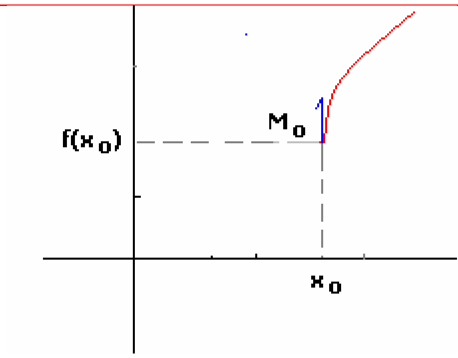
$$\begin{cases} (T): y = f_d'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) & x \ge x_0 \\ (T'): y = f_g'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) & x \le x_0 \end{cases}$$

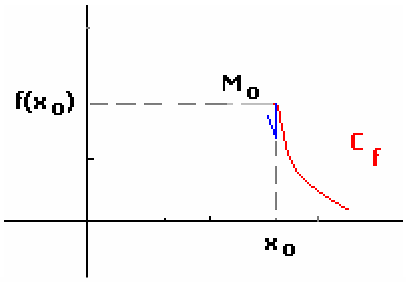
خاصية

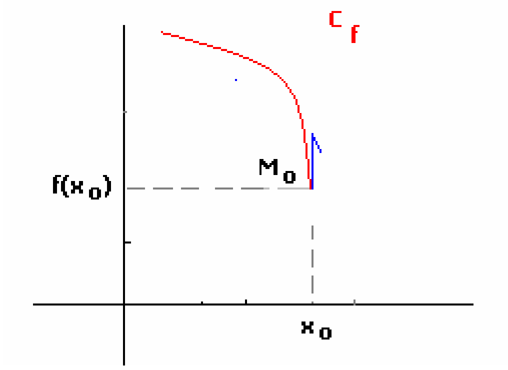
إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 (أو على اليسار في x_0) فان C_f يقبل نصف مماس عند النقطة ذات الافصول x_0 معامله الموجه $f_d'(x_0)$ (أو $f_g'(x_0)$)

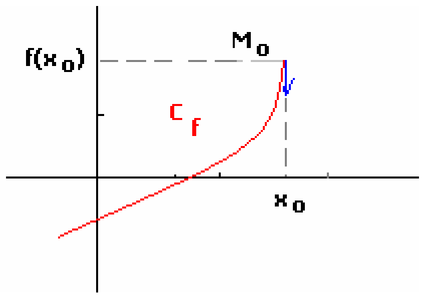
خاصية

إذا كانت f متصلة في x_0 (على اليمين في x_0 أو على اليسار في x_0) و كان $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$ فان C_f يقبل مماس عمودي عند عند النقطة ذات الافصول x_0 (نصف مماس عمودي عند النقطة ذات الافصول x_0)









تمرين نعتبر $f(x)=|x^2-1|$ و $g(x)=\sqrt{x}$

أدرس قابلية اشتقاق f على يمين ويسار 1 و أول النتائج هندسيا

أدرس قابلية اشتقاق g على يمين 0 و أول النتيجة هندسيا

5- الدالـــة المشتقة

أ- تعاريف

تعريف1

نقول إن f قابلة للاشتقاق على المجال المفتوح I إذا كانت f قابلة للاشتقاق في كل نـقطة من I .

تعريف2

نقول إن f قابلة للاشتقاق على المجال $[a;b]$ إذا كانت f قابلة للاشتقاق على $]a;b[$ و على يمين a و على يسار b .

ملاحظة : بالمثل نعرف الاشتقاق على $]a;b]$ و على $[a;b[$

تعريف3

لتكن قابلة للاشتقاق على المجال I

الدالة التي تربط كل عنصر x من I بالعدد $f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة نرمز لها بـ f' .

مثال : نعتبر $f(x)=x^2$

ندرس قابلية اشتقاق f و نحدد الدالة المشتقة

ليكن $x_0 \in \mathbb{R}$

$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} x+x_0 = 2x_0$ ومنه قابلة لاشتقاق في x_0 و $f'(x_0)=2x_0$

اذن f قابلة للاشتقاق في $\mathbb{R}$ و $f'(x)=2x$ $\forall x\in\mathbb{R}$

ملاحظة:

يكون للمنحنى الممثل لدالة f قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I مماس عند كل نقطة من هذا المنحنى

ب- المشتقة الثانية

لتكن f قابلة للاشتقاق مجال I

إذا الدالة f' قابلة للاشتقاق المجال I فان دالتها المشتقة تسمى الدالة المشتقة الثانية و نرمز لها بالرمز f''

مثال : نعتبر $f(x)=x^2$

رأينا أن $f'(x)=2x$ $\forall x\in\mathbb{R}$ وحيث $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=2$ فان $f''(x)=2$ $\forall x\in\mathbb{R}$

6- عمليات على الدوال المشتقة

*- لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I و $\lambda\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

$f+g$ و $f\times g$ و λf و f^n دوال قابلة للاشتقاق على المجال I

و اذا كانت g لا تنعدم على I فان $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ قابلتان للاشتقاق على المجال I

$$\forall x\in I \quad (f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$$

$$(f\times g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$(\lambda f)'=\lambda f'(x)$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x)=-\frac{g'(x)}{g^2(x)} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$ $\forall x\in I$ بحيث g لا تنعدم على I

*- لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

$$\left(f^n\right)'(x)=n\left(f(x)\right)^{n-1}\times f'(x) \qquad \forall x\in I$$ (نبين ذلك بالترجع)

7- الدوال المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية

* الدالة الثابتة: $f(x)=k$ $\forall x\in\mathbb{R}$

$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$ إذا f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x)=0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

* الدالة $f:x\to x$

$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=1$ إذن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x)=1$ $\forall x\in\mathbb{R}$

* الدالة $f : x \to ax + b$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$ إذن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x) = a \quad \forall x \in \mathbb{R}$

* الدالة $f : x \to x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x) = nx^{n-1} \; (x)' = nx^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

* الدالة $f : x \to \frac{1}{x}$

$\lim_{x \to x_0} \frac{-1}{x \times x_0} = -\frac{1}{x_0^2} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ إذن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$

و $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$

* الدالة $f : x \to \sqrt{x}$ لتكن $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = -\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

إذن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ و $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

f غير قابلة للاشتقاق في0

* الدالة $f : x \to \sin x$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(2\cos(x_0 + h)\right) \times 2 \times \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x_0$$

إذن

$x \to \sin x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\sin'(x) = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

* الدالة $f : x \to \cos x$

$x \to \cos x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\cos'(x) = -\sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

* الدالة $f : x \to \tan x$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\tan' x = \frac{(\sin x)'(\cos x) - (\sin x)(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

اذن $\tan' x = 1 + \tan^2 x \quad \forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

$x \to \tan x$ قابلة للاشتقاق في كل نقطة من $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

و $\tan' x = 1 + \tan^2 x \quad \forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

نتائج

* الدالة الحدودية قابلة للاشتقاق في $\mathbb{R}$
* الدالة الجدرية قابلة للاشتقاق في كل نقطة من حيز تعريفها

8- مبرهنة

ليكن المجال J صورة المجال I بالدالة التألفية $x \to ax+b$
إذا كانت f قابلة للاشتقاق على J فان $g : x \to f(ax+b)$ قابلة للاشتقاق على I و
$\forall x \in I \quad g'(x) = af'(ax+b)$

مثال: نعتبر $f(x) = \sin\left(5x - \frac{\pi}{3}\right)$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x) = 5\cos\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

جدول مشتقات بعض الدوال

$D_{f'}$	$f'(x)$	$f(x)$
$\mathbb{R}$	0	a
$\mathbb{R}$	1	x
$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \quad x^n$
$\mathbb{R}^*$	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{Z}^{*-} \quad x^n$
$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\cos x$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x$
$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$	$1 + \tan^2 x$	$\tan x$
$\mathbb{R}$	$-a\sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$
$\mathbb{R}$	$a\cos(ax+b)$	$\sin(ax+b)$

تمارين

1- أدرس اشتقاق f و حدد الدالة المشتقة في الحالات التالية:

* $f(x) = 5x^4 + 3x^2 + 4$ * $f(x) = \frac{5}{x^2}$ * $f(x) = \frac{3x-1}{2x-2}$ * $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-x}$

* $f(x) = \left(x^2 + x\right)^5$ * $f(x) = (\cos x)^5$ * $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x - \sin x}$

* $\begin{cases} f(x) = x^2 + x & x \le 0 \\ f(x) = x^3 - x^2 & x \succ 0 \end{cases}$ * $f(x) = x^2 + x|x|$

2- نعتبر $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$

أ- بين أن منحنى f يقبل مماسين موازيين للمستقيم الذي معادلته $y = -3x$

ب- أكتب معادلتي هذين المماسيين.