

الجاء السلمى

1- أنشطة

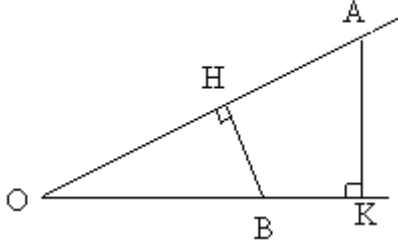
نعتبر O و A و B ثلاث نقط من المستوى مختلفة
ليكن K المسقط العمودي لـ A على (OB) و H المسقط العمودي لـ B على (OA) .
ليكن θ قياس $[\widehat{AOB}]$ بالراديان.

نعتبر أن كل من المستقيمين (OA) و (OB) مزودا بمعلم أصله O باختيار نفس الوحدة على المحورين.

الوضعية 1

O و A و B نقط غير مستقيمية

الحالة 1 زاوية حادة $[\widehat{AOB}]$ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$



$$\cos \theta = \frac{OK}{OA} = \frac{OH}{OB}$$

ومنه $OA \times OH = OB \times OK$; $OK = OA \cos \theta$

$$OA \times OH = OB \times OK = OB \times OA \cos \theta$$

$\overline{OA} \times \overline{OH} = \overline{OB} \times \overline{OK}$ و \overline{OH} و \overline{OA} لهما نفس المنحى ومنه

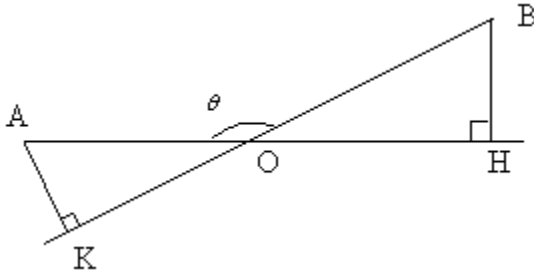
\overline{OK} و \overline{OB} لهما نفس المنحى ومنه

$$\overline{OA} \times \overline{OH} = \overline{OB} \times \overline{OK} = OA \times OB \cos \theta$$

$$\overline{OA} \times \overline{OH} = OA \times OH$$

$$\overline{OB} \times \overline{OK} = OB \times OK$$

الحالة 2 زاوية منفرجة $[\widehat{AOB}]$ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$



$$\cos(\pi - \theta) = \frac{OK}{OA} = \frac{OH}{OB}$$

ومنه $OA \times OH = OB \times OK = OB \times OA \cos(\pi - \theta)$

$$\overline{OA} \times \overline{OH} = -OA \times OH$$

$$\overline{OB} \times \overline{OK} = -OB \times OK$$

\overline{OH} و \overline{OA} لهما منحيان متعاكسان ومنه

\overline{OK} و \overline{OB} لهما منحيان متعاكسان ومنه

$$\overline{OA} \times \overline{OH} = \overline{OB} \times \overline{OK} = -OA \times OB \cos(\pi - \theta)$$

$$\overline{OA} \times \overline{OH} = \overline{OB} \times \overline{OK} = OA \times OB \cos \theta$$

حالة خاصة

إذا كان $\theta = \frac{\pi}{2}$ فإن $O = K$; $O = H$

$$\overline{OA} \times \overline{OH} = \overline{OB} \times \overline{OK} = 0$$

$$OA \times OB \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\overline{OA} \times \overline{OH} = \overline{OB} \times \overline{OK} = OA \times OB \cos \frac{\pi}{2}$$

الوضعية 2

O و A و B نقط مستقيمية ومنه $B = H$; $A = K$

* زاوية منعدمة أي $\theta = 0$ $[\widehat{AOB}]$

$$\overline{OB} \times \overline{OK} = \overline{OB} \times \overline{OA} \text{ و } \overline{OA} \times \overline{OH} = \overline{OA} \times \overline{OB}$$

$$\overline{OA} \times \overline{OH} = \overline{OB} \times \overline{OK} = OA \times OB \cos 0$$

* زاوية مستقيمية أي $\theta = \pi$ $[\widehat{AOB}]$

$$\overline{OA} \times \overline{OH} = \overline{OB} \times \overline{OK} = OA \times OB \cos \pi$$

خلاصة

لكل θ قياس $[\widehat{AOB}]$ حيث $0 \leq \theta \leq \pi$

$$\overline{OA} \times \overline{OH} = \overline{OB} \times \overline{OK} = OA \times OB \cos \theta$$

2- الجداء السلمي

(a) - تعريف

* ليكن \overline{OA} و \overline{OB} متجهتين غير منعدمتين في المستوى الجداء السلمي للمتجهتين \overline{OA} و \overline{OB} هو العدد الحقيقي $OA \times OB \cos \theta$ حيث θ قياس $[\widehat{AOB}]$.

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = OA \times OB \cos \theta$$

* نكتب $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0$ فان $\overline{OB} = \vec{0}$ أو $\overline{OA} = \vec{0}$

ملاحظة

$$\cos(\widehat{AOB}) = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}{OA \times OB}$$

(b) - المربع السلمي والمسافة

* ليكن $O \neq A$

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA} = OA \times OA \cos \widehat{AOA} = OA^2$$

الجداء السلمي $\overline{OA} \cdot \overline{OA}$ يسمى الربع السلمي لـ \overline{OA}

$$\overline{OA}^2 = OA^2$$

تمرين

ليكن ABC مثلثا متساوي الأضلاع حيث $AB = 3$

أحسب $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$

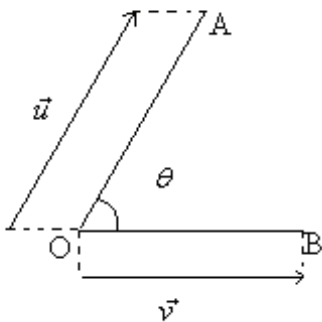
تمرين

1- أحسب $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ في الحالتين التاليتين

$$\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3} \quad AC = 4 \quad AB = 5 \quad \text{ب-} \quad \widehat{BAC} = \frac{\pi}{3} \quad AC = 6 \quad AB = 2$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 12 \quad AC = 6 \quad AB = 2\sqrt{2} \quad \text{2- أحسب } \widehat{BAC} \text{ علما أن}$$

(c) الجداء السلمي لمتجهتين



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{OA} \cdot \overline{OB} = OA \times OB \cos \theta = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos \theta$$

تعريف

لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين غير منعدمتين و $\vec{u} = \overline{OA}$ و $\vec{v} = \overline{OB}$ و θ قياس $[\widehat{AOB}]$ الجداء السلمي للمتجهتين \vec{u} و \vec{v} هو العدد الحقيقي الذي نرمز له بـ $\vec{u} \cdot \vec{v}$ حيث

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos \theta$$

إذا كان $\vec{u} = \vec{0}$ أو $\vec{v} = \vec{0}$ فان $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

ملاحظة

* لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين غير منعدمتين و $\vec{u} = \overline{OA}$ و $\vec{v} = \overline{OB}$

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

$$\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$$

تمرين لتكن A و B نقطتين حيث $AB = 4$

أنشئ M في الحالتين التاليتين

أ- $\overline{AB} \cdot \overline{AM} = 16$; $AM = 8$

ب- $\overline{AB} \cdot \overline{AM} = -12\sqrt{3}$; $AM = 6$

تمرين

لتكن $\vec{u} = \overline{OA}$ و $\vec{v} = \overline{OB}$ و θ قياس \widehat{AOB} حيث

1- نعتبر $\|\vec{u}\| = 3$; $\|\vec{v}\| = 5$

أحسب في الحالات التالية

$\theta = \frac{\pi}{6}$ (a ; $= \frac{2\pi}{3}$ (b ; $= \pi$ (c

2- حدد θ في الحالات التالية

أ- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6\sqrt{3}$; $\|\vec{v}\| = 4$; $\|\vec{u}\| = 3$

ب- $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\sqrt{3}$; $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$; $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$

تمرين

$ABCD$ متوازي الأضلاع حيث $AB = 4$; $AC = 2$

أحسب $\overline{AB} \cdot \overline{DC}$; $\overline{AD} \cdot \overline{CB}$

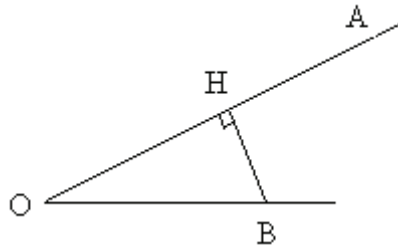
3- تعريف ثاني للجداء السلمي

من خلال الأنشطة السابقة رأينا أن $\overline{OA} \times \overline{OH} = OA \times OB \cos \theta$

أ- تعريف

لتكن \overline{OA} و \overline{OB} متجهتين غير منعدمتين

حيث H المسقط العمودي لـ B على (OA) .



ب- تعميم

لتكن \overline{AB} و \overline{CD} متجهتين غير منعدمتين

توجد نقطة وحيدة E حيث $\overline{AE} = \overline{CD}$

لتكن C' ; D' ; E' المساقط العمودية للنقط

C ; D ; E على (AB)

$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AB} \cdot \overline{AE} = \overline{AB} \times \overline{AE}'$

لدينا $\overline{AE} = \overline{CD}$ ومنه $\overline{AE}' = \overline{C'D}'$ لان الإسقاط يحافظ على معامل الاستقامة

ومنه $\overline{AE}' = \overline{C'D}'$

إذن $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AB} \times \overline{C'D}'$

خاصة

لتكن \overline{AB} و \overline{CD} متجهتين غير منعدمتين

المسقطان العموديان لـ C ; D على (AB) حيث $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AB} \times \overline{C'D}'$

بالتوالي.

تمرين

ليكن ABC مثلثا متساوي الساقين في الرأس A حيث $BC = 6$.
أحسب $\overline{BC} \cdot \overline{BA}$

4- خاصيات الجداء السلمي

أ- لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين غير منعدمتين و $\vec{u} = \overline{OA}$

و $\vec{v} = \overline{OB}$ و θ قياس \widehat{AOB}

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos \theta$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \cos \theta$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

إذا كان $\vec{u} = \vec{0}$ أو $\vec{v} = \vec{0}$ فإن $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} = 0$

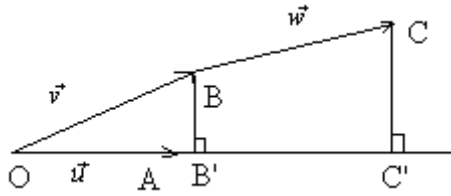
خاصية

للكل متجهتين \vec{u} و \vec{v} $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ نقول إن الجداء السلمي تماثلي

ب- نحسب $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$

نضع $\vec{u} = \overline{OA}$ و $\vec{v} = \overline{OB}$ و $\vec{w} = \overline{BC}$

B' و C' المسقطان العموديان لـ B و C على (OA)



$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \overline{OA} \cdot (\overline{OB} + \overline{BC}) = \overline{OA} \cdot \overline{OC}$$

$$= \overline{OA} \times \overline{OC}' = \overline{OA} \times \overline{OB}' + \overline{OA} \times \overline{B'C}'$$

$$= \overline{OA} \cdot \overline{OB} + \overline{OA} \cdot \overline{BC}$$

$$= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

خاصية

للكل \vec{u} و \vec{v} و \vec{w}

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{u}$$

ج- خاصية

للكل \vec{u} و \vec{v} و لكل $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \alpha \vec{v} = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

α

قواعد

للكل \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} و لكل $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} \quad \alpha \vec{u} \cdot \beta \vec{v} = (\alpha \vec{u} \cdot \vec{v}) \beta$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

ملاحظات

لتكن $\vec{u} \neq \vec{0}$ و $\vec{v} \neq \vec{0}$ و θ قياس الزاوية المحددة بالمتجهتين \vec{u} و \vec{v}

إذا كان $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ فإن $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$

إذا كان $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ فإن $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$

تمرين

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{-1}{2} \quad \|\vec{v}\| = 3 \quad \|\vec{u}\| = 2 \quad -1$$

أحسب

$$(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + 4\vec{v})$$

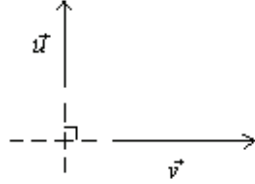
$$(2\vec{u} - \vec{v}) \cdot (2\vec{u} + \vec{v})$$

$$(3\vec{u} + \vec{v})^2$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{10} \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{3} \quad \|\vec{u}\| = 2 - 2$$

أحسب $\vec{u} \cdot \vec{v}$ -5- تعامد متجهتينتعريف

نقول إن \vec{u} و \vec{v} متعامدتان إذا و فقط إذا كان $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
نكتب $\vec{u} \perp \vec{v}$

ملاحظات* - $\vec{0}$ عمودية على أي متجهة* - \vec{u} و \vec{v} موجّهتان للمستقيمين (Δ) و (D) $(\Delta) \perp (D)$ تكافئ $\vec{u} \perp \vec{v}$ * - $\vec{u}^2 = 0$ تكافئ $\vec{u} = \vec{0}$ تمرين

$$\vec{u} \perp \vec{v} \quad \|\vec{v}\| = 3 \quad \|\vec{u}\| = 2 - 1$$

$$(-2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + 4\vec{v}) \quad \text{أحسب}$$

تمرين

ليكن ABC مثلثا حيث $AB = 1$ و $CB = CA = \sqrt{2}$ و D نقطة حيث $\vec{DB} - 2\vec{DC} = \vec{0}$ و I منتصف

[AB]

1- أ- عبر عن \vec{AD} بدلالة \vec{AB} و \vec{AC} ب- بين أن $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AI}$ استنتج أن $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}$ واستنتج $\cos \widehat{BAC}$ ج- أحسب $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$ واستنتج طبيعة BAD 2- نعتبر M حيث $-3\vec{MA} + 7\vec{MC} = \vec{0}$ أ- عبر عن \vec{AM} بدلالة \vec{AC} ب- أحسب $\vec{AC} \cdot \vec{AD}$ ج- بين أن $(MD) \perp (AC)$ تمرينليكن ABC مثلثابين مهما كانت M من المستوى

$$\vec{MA} \cdot \vec{BC} + \vec{MB} \cdot \vec{CA} + \vec{MC} \cdot \vec{AB} = 0$$

-6- تطبيقات الجداء السلمي

أ- مبرهنة الكاشي

$$BC^2 = (\vec{AC} - \vec{AB})^2$$

$$= AC^2 + AB^2 - 2 \times \vec{AC} \cdot \vec{AB}$$

ليكن ABC مثلثا

$$= AC^2 + AB^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$$

ميرھنةفي مثلث ABC

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$$

ملاحظة

$$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos \widehat{ABC} \quad *$$

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2 \times AC \times BC \times \cos \widehat{BCA}$$

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2 \times AB \times AC} \quad *$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2} \quad *$$

تمرينليكن ABC مثلثا حيث $AB = 3$ و $CB = \sqrt{37}$ و $CA = 4$ أحسب $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ و $\cos \widehat{BAC}$ تمرين $ABCD$ متوازي الأضلاع

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 \quad \text{أثبت}$$

ب- ميرھنة المتوسطليكن ABC مثلثا و I منتصف $[BC]$

$$AC^2 + AB^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2} \quad \text{أثبت أن}$$

ميرھنة

$$AC^2 + AB^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2} \quad \text{فان } [BC] \text{ منتصف } I \text{ اذا كان } ABC \text{ مثلثا}$$

تمرينليكن ABC مثلثا حيث $AB = 3$ و $CB = 6$ و $CA = 4$ أحسب أطوال متوسطات المثلث ABC تمرينليكن $ABCD$ رباعيا و I و J منتصفا $[AC]$ و $[BD]$

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2 \quad \text{أثبت أن}$$

تمرينليكن ABC مثلثا حيث $AB = 1$ و $AC = \sqrt{2}$ و $CB = 2$ 1-أحسب $\cos \widehat{BAC}$ ب-أحسب $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ 2- ليكن I منتصف $[BC]$. حدد AI 3- لتكن D نقطة حيث $\overline{DB} + 2\overline{DC} = \vec{0}$ أحسب $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$ استنتج طبيعة المثلث ABD د- العلاقات المترية في مثلث قائم الزاويةأنشطةليكن ABC مثلثا و A' منتصف $[BC]$ و H المسقطالعمودي لـ A على (BC)

بين أن

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = AA'^2 - \frac{BC^2}{4}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB^2 - \overline{BH} \times \overline{BC}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = AC^2 - \overline{CH} \times \overline{CB}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = AH^2 + \overline{HB} \times \overline{HC}$$

مبرهنة

ليكن ABC مثلثا و A' منتصف $[BC]$ و H المسقط العمودي لـ A على (BC)
 يكون ABC مثلثا قائ الزاوية في A اذا و فقط اذا تحقق أحد الشروط التالية

$$* AC^2 + AB^2 = BC^2$$

$$* AA' = \frac{BC}{2}$$

$$* AB^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$$

$$* AC^2 = \overline{CH} \times \overline{CB}$$

$$* AH^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC}$$