

ملاحظة:

(a) لكي نبين أن متجهين \vec{IK} و \vec{IJ} تحققان علاقة ما (مثلا $\vec{IJ} = \alpha \vec{IK}$ أو $\alpha \vec{IJ} + \beta \vec{IK} = \vec{0}$ أو ...).

نقوم بحساب \vec{IK} و \vec{IJ} بدلالة متجهين غير مستقيمين مكونين من النقط الأصلية \vec{AB} و \vec{AC} مثلا.

ونجد مثلا $\vec{IJ} = 2\vec{AB} - \vec{AC}$ و $\vec{IK} = 6\vec{AB} - 3\vec{AC}$ ومنه ننسخ أن $3\vec{IJ} = 6\vec{AB} - 3\vec{AC} = \vec{IK}$ إذن $\vec{IK} = 3\vec{IJ}$.

(b) ليكن (ABC) مثلثا و M نقطة بحيث $\vec{MA} = 3\vec{MB}$ يستحسن تغيير تعريف النقط M وجعلها من جهة واحدة كما يلي:

$$\vec{MA} - 3\vec{MA} = 3\vec{AB} \text{ يعني } \vec{MA} = 3(\vec{MA} + \vec{AB}) \text{ يعني } \vec{MA} = 3\vec{MB}$$

$$\text{يعني } -2\vec{MA} = 3\vec{AB} \text{ يعني } 2\vec{AM} = 3\vec{AB} \text{ إذن } \vec{AM} = \frac{3}{2}\vec{AB}$$

(B) المرجح

نسمي نقطة متزنة كل زوج (A, α) حيث A نقطة من المستوى و α عدد حقيقي.

(I) مرجح نقطتين.

(1) تعريف لتكن (A, α) و (B, β) نقطتين متزنتين.

إذا كان $\alpha + \beta \neq 0$ فإنه توجد نقطة وحيدة G تحقق

$$\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} = \vec{0}$$

النقطة G تسمى مرجح النقطتين المتزنتين (A, α) و (B, β) أو

$$\text{مرجح النظمة المتزنة } \{(A, \alpha), (B, \beta)\}$$

(2) خاصية مميزة:

تكون النقطة G مرجح النظمة $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$ إذا فقط إذا كان

$$\vec{OG} = \frac{1}{\alpha + \beta} (\alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB}) \text{ لكل } \theta \text{ من المستوى } P.$$

ملاحظة:

(a) إذا أردنا أن نبين أن G مرجح النظمة $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$ يستحسن استعمال التعريف ونبين أن $\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} = \vec{0}$. ولهذا نتبع ما يلي:

$$\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} = \alpha \vec{GA} + \beta (\vec{GA} + \vec{AB}) = (\alpha + \beta) \vec{GA} + \beta \vec{AB}$$

نحسب \vec{GA} بدلالة \vec{AB} و \vec{AC} ونعوض.

(b) إذا كان G مرجح النظمة $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$ وأردنا حساب \vec{AG}

أو \vec{BG} أو \vec{CG} أو ... يستحسن استعمال الخاصية المميزة.

$$\vec{OG} = \frac{1}{\alpha + \beta} (\alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB}) \text{ لكل } O \text{ من } P \text{ ثم نعوض } O \text{ ب } A$$

أو B أو C ...

(3) إذا كان G مرجح $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$ فإن G

مرجح $\{(A, k\alpha), (B, k\beta)\}$ لكل k من \mathbb{R}^* . وهذا يعني أن المرجح

لا يتغير إذا ضربنا الأوزان أو قسمناها على عدد غير منعدم.

(A) الحساب المتجهي

(1) تكون متجهتان \vec{u} و \vec{v} متساويتين إذا فقط

إذا كان لهما نفس الاتجاه (يعني حاملهما متوازيان) ونفس المنحني ونفس المنظم.

$$\vec{AB} = -\vec{BA} \quad (2)$$

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \quad (3)$$

$$\vec{AB} = \vec{0} \text{ تكافئ } A = B \quad (4)$$

(5) من أجل تحديد $\vec{u} + \vec{v}$

نريح \vec{u} و \vec{v} إلى نفس الأصل ويكون متوازي أضلاع.

(6) يكون الرباعي $(ABCD)$ متوازي أضلاع

إذا فقط إذا تحققت إحدى

الشروط التالية:

$$\vec{AB} = \vec{DC} \quad (a)$$

$$\vec{AD} = \vec{BC} \quad (b)$$

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} \quad (c)$$

(d) القطران $[AC]$ و $[BD]$ لهما نفس المنتصف.

(7) I منتصف القطعة $[AB]$ يعني

$$\vec{AI} = \frac{1}{2} \vec{AB} \quad (* \quad \vec{IA} = -\vec{IB} \quad (* \quad \vec{AI} = \vec{IB} \quad (*$$

$$\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0} \quad (* \quad \vec{BI} = \frac{1}{2} \vec{BA} \quad (*$$

ملاحظة:

(a) إذا كان I منتصف $[AB]$ يستحسن استعمال $\vec{AI} = \frac{1}{2} \vec{AB}$

(b) لكي نبين أن I منتصف $[AB]$ يستحسن أن نبين أن

$$\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$$

(8) ليكن (ABC) مثلثا و I منتصف $[BC]$

$$\text{لدينا } \vec{AI} = \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{AC})$$

(9) ليكن (ABC) مثلثا.

I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[AC]$

$$\text{لدينا } \vec{IJ} = \frac{1}{2} \vec{BC}$$

(10) تكون \vec{u} و \vec{v} مستقيمين إذا فقط إذا كان حاملهما متوازيين.

(b) تكون \vec{u} و \vec{v} مستقيمين إذا فقط إذا كان

$$\vec{v} = \alpha \vec{u} \text{ أو } \vec{u} = \alpha \vec{v}$$

(c) تكون النقط A و B و C مستقيمية إذا فقط إذا كانت \vec{AB} و \vec{AC}

مستقيمين يعني $\vec{AB} = \alpha \vec{AC}$ أو $\vec{AC} = \alpha \vec{AB}$

(d) يكون (AB) و (CD) متوازيين إذا فقط إذا كانت \vec{AB} و \vec{CD}

مستقيمين.

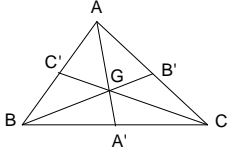
5) إحدائيات المرجح.

ليكن G مرجح $\{(A, \alpha)(B, \beta)(C, \gamma)\}$ إحدائيات G هي

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma}(\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C) \\ y_G = \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma}(\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C) \end{cases}$$

6) التجميعية.

إذا كان G مرجح $\{(A, \alpha)(B, \beta)(C, \gamma)\}$ و G_1 مرجح $\{(A, \alpha)(B, \beta)\}$ فإن G مرجح $\{(G_1, \alpha + \beta)(C, \gamma)\}$ وهذا يعني أن مرجح ثلاث نقط لا يتغير إذا عوضنا نقطتين بمرجحهما متزن بمجموع وزني تلك النقطتين.



7) ليكن (ABC) مثلثا مركز ثقله G

G هو مرجح $\{(A, 1)(B, 1)(C, 1)\}$

' و A' و B' و C' منتصفات

$[BC]$ و $[AC]$ و $[AB]$ على التوالي المتوسطات

(AA') و (BB') و (CC') تتلاقى في G .

$$\overline{CG} = \frac{2}{3}\overline{CC'} \quad \overline{BG} = \frac{2}{3}\overline{BB'} \quad \overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AA'}$$

III) مرجح أربع نقط.

نعرف بنفس الطريقة مرجح أربع نقط وسيكون لدينا نفس الخاصيات السابقة. هناك فرق فقط في التجميعية حيث تصبح:

7) مرجح أربع نقط لا يتغير إذا عوضنا نقطتين بمرجحهما متزن بمجموع الوزنين أو عوضنا كل نقطتين بمرجحهما متزن بمجموع الوزنين، أو عوضنا ثلاث نقط بمرجحها متزن بمجموع الأوزان.

4) ليكن G مرجح $\{(A, \alpha)(B, \beta)\}$ مع $(\alpha \neq 0)$ يسمى مركز ثقل A و B .

لدينا من خلال ما سبق G مرجح $\{(A, 1)(B, 1)\}$ إذن

$$\overline{OG} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB})$$

نجد $\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ إذن G منتصف $[AB]$

خاصية: مرجح النظمة $\{(A, 1)(B, 1)\}$ هو مرجح $\{(A, 1)(B, 1)\}$ وهو منتصف $[AB]$.

ملاحظة: إذا أردنا أن نبين أن I منتصف $[AB]$ نبين أن I مرجح $\{(A, 1)(B, 1)\}$ يعني $\overline{IA} + \overline{IB} = \vec{0}$.

5) ليكن G مرجح $\{(A, \alpha)(B, \beta)\}$ لدينا

$$\overline{OG} = \frac{1}{\alpha + \beta}(\alpha \overline{OA} + \beta \overline{OB})$$

نجد $\overline{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overline{AB}$ إذن $G \in (AB)$

خاصية: إذا كان G مرجح $\{(A, \alpha)(B, \beta)\}$ فإن $G \in (AB)$ ولدينا

$$\overline{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overline{AB}$$

ملاحظة: إذا أردنا إنشاء المرجح G نقوم بحساب \overline{AG} بدلالة \overline{AB} أو \overline{BG} بدلالة \overline{BA} .

6) إحدائيات المرجح:

ليكن G مرجح $\{(A, \alpha)(B, \beta)\}$ إحدائيات G هي

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{\alpha + \beta}(\alpha x_A + \beta x_B) \\ y_G = \frac{1}{\alpha + \beta}(\alpha y_A + \beta y_B) \end{cases}$$

II) مرجح ثلاث نقط.

1) **تعريف:** لتكن (A, α) (B, β) (C, γ) ثلاث نقط متزنة.

إذا كان $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ فإنه توجد نقطة وحيدة G تحقق:

$$\alpha \overline{GA} + \beta \overline{GB} + \gamma \overline{GC} = \vec{0}$$

النقط (A, α) و (B, β) و (C, γ) أو مرجح النظمة المتزنة $\{(A, \alpha)(B, \beta)(C, \gamma)\}$.

2) خاصية مميزة:

تكون النقطة G مرجح النظمة $\{(A, \alpha)(B, \beta)(C, \gamma)\}$ إذا وفقط إذا

$$\overline{OG} = \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma}(\alpha \overline{OA} + \beta \overline{OB} + \gamma \overline{OC})$$

كان: لكل O من المستوى P

ملاحظة: نفس ملاحظة (I).

3) المرجح لا يتغير إذا ضربنا أو قسمنا الأوزان على نفس عدد غير منعدم.

4) ليكن G مرجح $\{(A, \alpha)(B, \alpha)(C, \alpha)\}$ مع $(\alpha \neq 0)$.

لدينا G مرجح $\{(A, 1)(B, 1)(C, 1)\}$. المرجح G يسمى في هذه الحالة مركز ثقل النقط A, B, C أو مركز ثقل المثلث (ABC) .

خاصية: مرجح $\{(A, \alpha)(B, \alpha)(C, \alpha)\}$ هو

مرجح $\{(A, 1)(B, 1)(C, 1)\}$ وهو مركز ثقل (ABC) .