ج م ع	الحساب ـالترتيب في IR ملخص الدرس	ح.بوعيون

الحساب في IR .

1) قواعد الحساب في IR .

ليكن a و b و c و d من IR .

(a $a=b$ يكافئ $a+c=b+c$

(b $a=b$ يكافئ $a.c=b.c$ $(c\neq 0)$

(c إذا كان $\begin{cases}a=b\\c=d\end{cases}$ و فإن $\begin{cases}a+c=b+d\\a.c=b.d\end{cases}$ و

(d $ab=0$ يكافئ $a=0$ أو $b=0$.

(e $ab\neq 0$ يكافئ $a\neq 0$ و $b\neq 0$.

(g $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ يكافئ $a.d=b.c$ $(a\neq 0 , b\neq 0)$

(h $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ و $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

(i $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$ و $\frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{a}{bc}$ و $\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{b}{a}$

2) القوى في IR

a) تعريف

*) $a^0=1$ $(a\neq 0)$ *) $a^1=1$

*) $a^n=\underbrace{a.a.a.....a}_{n\,fois}$ $(n\in IN^*-\{1\})$

*) $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

b) خاصيات

(a ليكن a و b من IR^* و m و n من $\mathbb{Z}$.

*) $a^m.a^n=a^{m+n}$ *) $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

*) $(a^m)^n=a^{mn}$ *) $(ab)^n=a^n b^n$

*) $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$ *) $(\frac{a}{b})^n=\frac{a^n}{b^n}$

(b إذا كان $a=b$ فإن $a^2=b^2$

(c $\boxed{\text{إذا كان } a^2=b^2 \text{ و } a \text{ و } b \text{ لهما نفس الإشارة فإن } a=b .}$

(d $a^2=b^2$ يكافئ $a=b$ أو $a=-b$.

ملاحظة لكي نبين أن : $a=b$ يكفي مثلا أن نبين أن $a^2=b^2$ و a و b لهما نفس الإشارة

3) متطابقات هامة

(a $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

(b $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

(c $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

(d $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

(e $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(f $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(g $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

4) الجذور المربعة .

تعريف ليكن $a\in IR^+$. الجذر المربع للعدد a هو العدد الموجب b الذي يحقق : $b^2=a$. ونكتب $\sqrt{a}=b$.

خاصيات .

(a ليكن a و b من IR^+ .

*) $\sqrt{a}\geq 0$ *) $\boxed{\sqrt{a^2}=(\sqrt{a})^2=a}$

*) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ *) $(\sqrt{a})^n=\sqrt{a^n}$

*) $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(b ليكن $x\in IR$. $\boxed{\sqrt{x^2}=|x| .}$

(c إذا كان $ab>0$ فإن : $\sqrt{ab}=\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}$ و $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$

(d ليكن $a\in IR^+$ $\boxed{x^2=a \text{ يكافئ } x=\sqrt{a} \text{ أو } x=-\sqrt{a} .}$

5) التناسبية .

(a نقول إن العددين a و b متناسبان مع c و d إذا وفقط إذا كان :

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

(b إذا كان : $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ فإن :

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots\cdots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_na_n}{k_1b_1+k_2b_2+\cdots+k_nb_n}$$

6) الجزء الصحيح .

a) تعريف : كل عدد حقيقي x محصور بين عددين نسبيين متتابعين k و $k+1$ يعني : $k\leq x<k+1$

العدد النسبي k يسمى الجزء الصحيح للعدد x ونكتب $E(x)=k$ أو $[x]=k$

ملاحظة :

*) الجزء الصحيح للعدد x هو العدد النسبي الذي يوجد مباشرة قبل x .

*) $E(x)\leq x<E(x)+1$ لكل x من IR .

II) الترتـــــيـــــب في IR .

1) خاصيـــــات

(a *) $a\geq b$ يكـــافئ $a-b\geq 0$

*) $a\leq b$ يكـــافئ $a-b\leq 0$

(b *) $a>b$ يكـــافئ $a-b>0$

*) $a<b$ يكـــافئ $a-b<0$

(c *) $a\leq b$ يعني $a<b$ أو $a=b$.

*) إذا كان $a<b$ فإن $a\leq b$ و العكس غير صحيح .

(d *) $a\geq b$ يكـــافئ $a+c\geq b+c$

*) $a>b$ يكـــافئ $a+c>b+c$

(e *) إذا كان $\begin{cases}a\leq b\\b\leq c\end{cases}$ و فإن $a\leq c$.

*) إذا كان و $\begin{cases} a\le b \\ b<c \end{cases}$ فإن $a<c$.

f) *) إذا كان و $\begin{cases} a\le b \\ c\le d \end{cases}$ فإن $a+c\le b+d$ والعكس غير صحيح .

*) إذا كان و $\begin{cases} a\le b \\ c<d \end{cases}$ فإن $a+c<b+d$

g) *) إذا كان و $\begin{cases} a\le b \\ c\ge 0 \end{cases}$ فإن $ac\le bc$

*) إذا كان و $\begin{cases} a\le b \\ c\le 0 \end{cases}$ فإن $ac\ge bc$.

f) *) إذا كان و $\begin{cases} 0\le a\le b \\ 0\le c\le d \end{cases}$ فإن $ac\le bd$ والعكس غير صحيح .

*) إذا كان و $\begin{cases} 0\le a\le b \\ 0<c<d \end{cases}$ فإن $ac<bd$

i) ليكن $a>0$ و $b>0$. *) $a\le b$ يكـــــافئ $\frac{1}{a}\ge\frac{1}{b}$

j) ليكن $a<0$ و $b<0$. *) $a\le b$ يكـــــافئ $\frac{1}{a}\ge\frac{1}{b}$

k) ليكن $a\ge 0$ و $b\ge 0$
*) $a\le b$ يكـــــافئ $a^2\le b^2$
*) $a\le b$ يكـــــافئ $\sqrt{a}\le\sqrt{b}$

l) ليكن $a\le 0$ و $b\le 0$ *) $a\le b$ يكـــــافئ $a^2\ge b^2$

m) ليكن a و b من IR $|a|\le|b|$ يكـــــافئ $a^2\le b^2$

n) إذا كان لـ a و b نفس الإشارة و $a+b=0$ فإن $a=0$ و $b=0$

ملاحظة

إذا كان العددين a و b يحتويان على الجذور المربعة ، لكي نقارن a و b يكفي مثلا أن نقارن a^2 و b^2 ونتحقق من إشارة a و b ثم نستعمل الخاصيتين k) و l) .

2) القيـــــمة المطلقة .

تعريف :ليكن x من IR . القيمة المطلقة للعدد x هي العدد الذي نرمز له ب $|x|$ والمعرف بما يلي :

$$|x|=\begin{cases} x & ; \ x\ge 0 \\ -x & ; \ x\le 0 \end{cases}$$

يعني :
*) إذا كان $x\ge 0$ فإن القيمة المطلقة للعدد x هي نفسه .
*) إذا كان $x\le 0$ فإن القيمة المطلقة للعدد x هي مقابله .

خاصيـــــات

a) *) $|-x|=|x|$ *) $|x|\ge 0$

*) $|xy|=|x||y|$ *) $|x^n|=|x|^n$ *) $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$

b) *) $|x|=r$ يكـــــافئ $x=r$ أو $x=-r$.
*) $|x|=|y|$ يكـــــافئ $x=y$ أو $x=-y$.

c) *) $|x|\le r$ يكـــــافئ $-r\le x\le r$
*) $|x|\ge r$ يكـــــافئ $x\ge r$ أو $x\le -r$

3) المجـــــالات

a) $[a,b]=\{x\in IR \,/\, a\le x\le b\}$

a) $[a,b[=\{x\in IR \,/\, a\le x<b\}$

a) $]a,b]=\{x\in IR \,/\, a<x\le b\}$

a) $]a,b[=\{x\in IR \,/\, a<x<b\}$

a) $[a,+\infty[=\{x\in IR \,/\, x\ge a\}$

a) $]a,+\infty[=\{x\in IR \,/\, x>a\}$

a) $]-\infty,a]=\{x\in IR \,/\, x\le a\}$

a) $]-\infty,a[=\{x\in IR \,/\, x<a\}$

4) التأطيـــــر

تعريف : كل متفاوتة من المتفاوتات : $a<x<b$ و $a\le x<b$ و $a<x\le b$ و $a\le x\le b$ تسمى تأطيرا للعدد x سعته $b-a$.

5) القيمة المقربـــــة .

a) i) إذا أردنا أن نبين أن x_0 قيمة مقربة بتفريط للعدد x بالدقة r ، نقوم بتأطير $x-x_0$ و سنجد $\boxed{0\le x-x_0\le r}$

ii) إذا أردنا أن نبين أن x_0 قيمة مقربة بإفراط للعدد x بالدقة r ، نقوم بتأطير $x-x_0$ و سنجد $\boxed{-r\le x-x_0\le 0}$.

iii) إذا أردنا أن نبين أن x_0 قيمة مقربة للعدد x بالدقة r ، نقوم بتأطير $x-x_0$ و سنجد $\boxed{-r\le x-x_0\le r}$

يعني $\boxed{|x-x_0|\le r}$.

b) إذا أردنا أن نحدد قيمة مقربة للعدد x نقوم بتأطير العدد x و سنجد $\boxed{a\le x\le b}$: ومن هنا نستنتج أن ما يلي :

i) a هي القيمة المقربة بتفريط للعدد x بالدقة $r=b-a$

ii) b هي القيمة المقربة بإفراط للعدد x بالدقة $r=b-a$

iii) $\frac{a+b}{2}$ هي القيمة المقربة للعدد x بالدقة $r=\frac{b-a}{2}$

c) ملاحظـــة

يمكن تحديد قيمة مقربة للعدد x مباشرة إذا كانت لدينا إحدى التأطيرات التالية :

i) $\boxed{0\le x-x_0\le r}$ وستكون x_0 قيمة مقربة بتفريط للعدد x بالدقة r

ii) $\boxed{-r\le x-x_0\le 0}$ وستكون x_0 قيمة مقربة بإفراط للعدد x بالدقة r

iii) $\boxed{-r\le x-x_0\le r}$ أو $\boxed{|x-x_0|\le r}$ وستكون x_0 قيمة مقربة للعدد x بالدقة r

d) التقريب العشري .

ليكن x من IR .

i) العدد العشري $\frac{E(10^n x)}{10^n}$ يسمى القيمة العشرية المقربة بتفريط للعدد x بالدقة 10^{-n} .

i) العدد العشري $\frac{E(10^n x)}{10^n}+1$ يسمى القيمة العشرية المقربة بإفراط للعدد x بالدقة 10^{-n} .