تمارين محلولة

تمرين1

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{i};\vec{j})$، نعتبر $\frac{267\pi}{6}$ و $-\frac{238\pi}{3}$

الأفصولين المنحنيين للنقطتين A و B . لتكن C نقطة حيث $[2\pi]$ $\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}}\right)\equiv\frac{-42\pi}{5}$.

1- حدد الأفصولين المنحنيين الرئيسين للنقطتين A و B

2- حدد القياس الرئيسي $\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)$ ثم حدد $\cos\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$

3- حدد القياس الرئيسي $\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}}\right)$

4- مثل النقط A و B و C على الدائرة المثلثية

تمرين2

1- أحسب π

$$A=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7}{8}$$

π

$$B=\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\sin^2\frac{7}{8}$$

2- علما أن $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$ حدد $\cos\frac{\pi}{8}$ و $\sin\frac{\pi}{8}$ و $\cos\frac{7\pi}{8}$

تمرين3

1- بسط $C=\sin\left(\frac{7\pi}{2}+x\right)\cdot\cos(7\pi-x)+\cos\left(\frac{27\pi}{2}-x\right)\cdot\sin(3\pi+x)$

2- بين أن $\cos^6 x+\sin^6 x+3\cos^2 x\sin^2 x=1$

الحل

تمرين1

1- نحدد الأفصولين المنحنيين الرئيسين للنقطتين A و B

لدينا $A\left(\frac{267\pi}{6}\right)$ و $\frac{267\pi}{6}=2\times22\pi+\frac{\pi}{2}$ حيث $\frac{\pi}{2}\in]-\pi;\pi]$

إذن $\frac{\pi}{2}$ الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة A

لدينا $B\left(-\frac{238\pi}{3}\right)$ و $-\frac{238\pi}{3}=2\times-40\pi+\frac{2\pi}{3}$ حيث $\frac{2\pi}{3}\in]-\pi;\pi]$

إذن $\frac{2\pi}{3}$ الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة B

2- نحدد القياس الرئيسي $\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)$ ثم نحدد $\cos\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$

$\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}+2k\pi=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ و $\frac{\pi}{6}\in]-\pi;\pi]$

إذن $\frac{\pi}{6}$ القياس الرئيسي $\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)$ ومنه $\cos\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

3- نحدد القياس الرئيسي $\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}}\right)$

لدينا $\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}}\right)\equiv\frac{-42\pi}{5}$ $[2\pi]$

حسب علاقة شال لدينا

$$\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OA}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)+2k\pi$$

$$\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}}\right)=-\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)+2k\pi$$

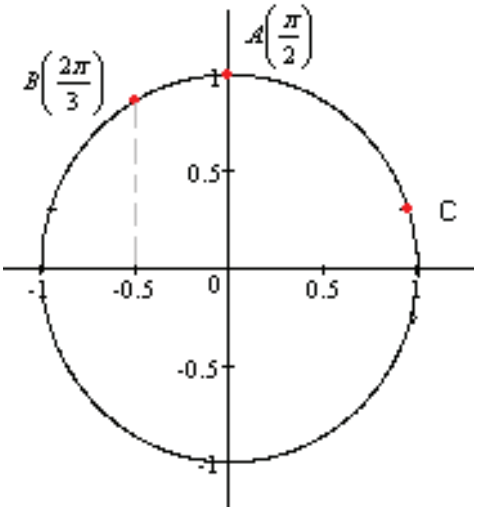
$$\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}}\right)=\frac{42\pi}{5}+\frac{\pi}{6}+2k\pi$$

$$\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}}\right)=\frac{257\pi}{30}+2k\pi$$

$$\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}}\right)=\frac{17\pi}{30}+8\pi+2k\pi=\frac{17\pi}{30}+2(4+k)\pi$$

وحيث $\frac{17\pi}{30}\in]-\pi;\pi]$ فان $\frac{17\pi}{30}$ هي القياس الرئيسي $\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}}\right)$

4- نمثل النقط A و B و C على الدائرة المثلثية



تمرين2

1- نحسب A و B

لدينا $A=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7}{8}\pi$

$\cos\frac{7\pi}{8}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)=-\cos\frac{\pi}{8}$ ومنه $\cos^2\frac{7\pi}{8}=\cos^2\frac{\pi}{8}$

$\cos\frac{5\pi}{8}=\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)=-\cos\frac{3\pi}{8}$ ومنه $\cos^2\frac{5\pi}{8}=\cos^2\frac{3\pi}{8}$

و بالتالي $A=2\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}\right)$

لدينا $\cos\frac{3\pi}{8}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=\sin\frac{\pi}{8}$ ومنه $A=2\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8}\right)=2$

لدينا $B=\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\sin^2\frac{7}{8}\pi$

ومنه

$$A+B=\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{3}{8}+\sin^2\frac{5}{8}+\cos^2\frac{5}{8}\pi+\sin^2\frac{7}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}\frac{7}{8}$$

و بالتالي $A+B=4$ اذن $B=4-A=4-2=2$

2- نحدد $\cos\frac{\pi}{8}$ و $\sin\frac{\pi}{8}$ و $\cos\frac{7\pi}{8}$

لدينا $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$ نعلم أن $1+\tan^2\frac{\pi}{8}=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{8}}$

ومنه $\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1}{1+\tan^2\frac{\pi}{8}}=\frac{1}{1+\left(\sqrt{2}-1\right)^2}=\frac{1}{4-2\sqrt{2}}=\frac{1}{2\left(2-\sqrt{2}\right)}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

وحيث أن $\frac{\pi}{8}\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ فان $\cos\frac{\pi}{8}\succ 0$ و $\sin\frac{\pi}{8}\succ 0$

و بالتالي $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ و $\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{8}}=\sqrt{1-\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$$\cos\frac{7\pi}{8}=-\cos\frac{\pi}{8}=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

تمرين3

1- نبسط $C=\sin\left(\frac{7\pi}{2}+x\right)\cdot\cos\left(7\pi-x\right)+\cos\left(\frac{27\pi}{2}-x\right)\cdot\sin\left(3\pi+x\right)$

لدينا $\sin\left(3\pi+x\right)=\sin\left(\pi+x\right)=-\sin x$

$\cos\left(\frac{27\pi}{2}-x\right)=\cos\left(14\pi-\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$ و π

و $\cos\left(7\pi-x\right)=\cos\left(\pi-x\right)=-\cos x$

و $\sin\left(\frac{7\pi}{2}+x\right)=\sin\left(4\pi-\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\cos x$ و π

إذن $C=\cos^2 x+\sin^2 x=1$

2- نبين أن $\cos^6 x+\sin^6 x+3\cos^2 x\sin^2 x=1$

$$\begin{aligned}\cos^6 x+\sin^6 x+3\cos^2 x\cdot\sin^2 x&=\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)\left(\cos^4 x-\cos^2 x\cdot\sin^2 x+\sin^4 x\right)+3\cos^2 x\cdot\sin^2 x\\&=\cos^4 x-\cos^2 x\cdot\sin^2 x+\sin^4 x+3\cos^2 x\cdot\sin^2 x\\&=\cos^4 x+2\cos^2 x\cdot\sin^2 x+\sin^4 x\\&=\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)^2=1\end{aligned}$$

تمارين غير محلولة

التمرين1

1- حدد الأفصول المنحني الرئيسي المرتبط بالافصولين المنحنيين التاليين $\frac{789\pi}{7}$; $\frac{-214\pi}{5}$

2- مثل على الدائرة المثلثية النقط ذات الأفاصيل المنحنية $\frac{-\pi}{6}$ و $\frac{2\pi}{3}$ و $\frac{23\pi}{2}$ و $\frac{-59\pi}{4}$

3- بين أن الاعداد التالية تمثل الافاصيل المنحنية لنفس النقطة $\frac{601\pi}{6}$; $\frac{-143\pi}{6}$; $\frac{25\pi}{6}$

2- مثل على الدائرة المثلثية النقط M_k التي أفاصيلها المنحنية هي $\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{4}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

4- ليكن x الأفصول المنحني الرئيسي لنقطة M

حدد الأفاصيل المنحنية لنقطة M التي تنتمي الى المجال I في الحالتين التاليتين

(a $x=\frac{\pi}{4}$ $I=\left[\frac{34\pi}{3};\frac{43\pi}{3}\right]$ (b $x=\frac{-2}{5}$ $I=\left[\frac{-33\pi}{5};\frac{-13\pi}{5}\right]$

5- ضع على دائرة مثلثية النقط M التي أفصولها المنحني x حيث $3x \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

6- ما هو القياس الرئيسي لزاوية موجهة قياسها أحد القياسات

$$-\frac{25\pi}{3}\ ;\ \frac{52\pi}{5}\ ;\ -36\pi\ ;\ 47\pi$$

التمرين2

- أنشئ مثلثا ABC متساوي الساقين في الرأس A حيث $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv -\frac{2\pi}{5}\ [2\pi]$

- حدد بالرديان قياس كل من الزوايا $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)$ و $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AC}\right)$ و $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{AC}\right)$

التمرين3

على الدائرة المثلثية نعتبر $A\left(\frac{-\pi}{3}\right)$. أعط القياس الرئيسي للزاوية $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM})$ في كل من الحالتين

(a M أفصول منحني لنقطة $\frac{27\pi}{2}$

(b $(\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OM}) \equiv \frac{23\pi}{8}\ [2\pi]$

التمرين4

1- حدد النسب المثلثية للأعداد $\cos\frac{7}{6}\pi$; $\tan-\frac{73\pi}{3}$; $\sin\frac{15\pi}{4}$; $\sin\frac{-23\pi}{3}$

2- إذا علمت أن $\sin\frac{7\pi}{8} = \frac{\pi\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ فأحسب $\cos\frac{7}{8}$; $\tan\frac{7\pi}{8}$; $\sin\frac{\pi}{8}$; $\sin\frac{3\pi}{8}$

$$\cos\frac{327\pi}{8}\ ;\ \tan\frac{-78\pi}{8}\ ;\ \sin\frac{-25\pi}{8}$$

التمرين5

ليكن $x \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$. نضع $A = \frac{\tan x - 1}{\tan^2 x + 1}$

1- بين أن $A = \cos x \sin x - \cos^2 x$

2- إذا علمت أن $\sin x = \frac{4}{5}$ فأحسب A

3- إذا علمت أن $A = 0$ فاحسب x

التمرين6

1- إذا علمت أن $\sin\frac{7\pi}{8} = \frac{\pi\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ أحسب $\cos\frac{7}{8}$; $\tan\frac{7\pi}{8}$; $\sin\frac{\pi}{8}$; $\sin\frac{3\pi}{8}$

2- بسط $A = \cos^6 x + \sin^6 x + 3\cos^2 x \cdot \sin^2 x$ $B = (1+\sin x + \cos x)^2 - 2(1+\sin x)(1+\cos x)$

$C = 2\left(\cos^6 x + \sin^6 x\right) - 3\left(\cos^4 x + \sin^4 x\right)$ $D = \cos^6 x + \sin^6 x + \cos^4 x + \sin^4 x + 5\cos^2 x \sin^2 x$

التمرين7

1- أحسب $\tan\frac{\pi}{5} + \tan\frac{2\pi}{5} + \tan\frac{3\pi}{5} + \tan\frac{4}{5}\pi$

2- ليكن $x \in \mathbb{R}$

بسط $\sin(\pi - x)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cdot\cos(\pi - x)$

$$\sin(x - 7\pi) + \sin(x + 9\pi)$$

$$\cos(x - \frac{27\pi}{2}) - \sin(x + 27\pi)$$

التمرين8

ليكن $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$. نعتبر $A = \cos^4 x + \sin^4 x - (\sin x \cos x)(\cos x - \sin x)^2$

1- بين أن $A = 1 - \sin x \cdot \cos x$

2- علما أن $\sin\frac{11\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ أحسب A من أجل $x=\frac{11\pi}{12}$

التمرين9

نضع $P(x)=\cos^6 x+\sin^6 x-\frac{1}{4}$ حيث $x\in[0;\pi]$

1- بين أن $P(x)=\frac{3}{4}\left(2\cos^2 x-1\right)^2$

2- أكتب $P(x)$ بدلالة $\tan x$

3- علما أن $\tan x=-\sqrt{2}$ أحسب $P(x)$ و $\cos x$.

التمرين10

حدد

$A=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7}{8}$ π

$B=1+\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}+.....+\sin\frac{13}{7}$

التمرين11

مثل على دائرة المثلثية النقط M التي أفاصيلها المنحنية α حيث $\cos\alpha=\frac{-3}{4}$، ثم لون بالأحمر جزء الدائرة المثلثية الذي يحتوي على النقط التي أفاصيلها المنحنية β حيث $\cos\beta\le-\frac{3}{4}$

التمرين12

لون بالأحمر مجموعة النقط M التي أفاصيلها المنحنية θ حيث $\tan\theta\ge 2$

التمرين13

على الدائرة المثلثية انشئ النقطتين M_1 و M_2 الذي أرتوبيهما $\frac{1}{2}$

1- حدد مجموعة النقط M التي أفاصيلها المنحنية x حيث $\sin x\succ\frac{1}{2}$

2- حدد مجموعة الأعداد x من $]-\pi;\pi]$ حيث $\sin x\succ\frac{1}{2}$

3- حدد مجموعة الأعداد x من $[0;2\pi[$ حيث $\sin x\succ\frac{1}{2}$

4- حدد مجموعة الأعداد x من $\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right[$ حيث $\sin x\succ\frac{1}{2}$

الحساب المثلثي

التمرين1

1- A و B نقطتان أفصولا هما المنحنيان $\frac{789\pi}{7}$; $\frac{-214\pi}{5}$ على التوالي

حدد الأفصول المنحني الرئيسي لكل من A و B

2- مثل على الدائرة المثلثية النقط ذات الأفاصيل المنحنية $\frac{-\pi}{6}$ و $\frac{2\pi}{3}$ و $\frac{23\pi}{2}$ و $\frac{-59\pi}{4}$

3- بين أن القياسات التالية تمثل قياسات نفس الزاوية $\frac{601\pi}{6}$; $\frac{-143\pi}{6}$; $\frac{25\pi}{6}$

4- ما هو القياس الرئيسي لزاوية موجهة قياسها أحد القياسات

47π ; -36π ; $\frac{52\pi}{5}$; $-\frac{25\pi}{3}$

3- مثل على الدائرة المثلثية النقط M_k التي أفاصيلها المنحنية هي $\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{4}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

4- ليكن x الأفصول المنحني الرئيسي لنقطة M

حدد الأفاصيل المنحنية لنقطة M التي تنتمي الى المجال I في الحالتين التاليتين

a) $x=\frac{\pi}{4}$ $I=\left[\frac{34\pi}{3};\frac{43\pi}{3}\right]$

b) $x=\frac{-2}{5}\pi$ $I=\left[\frac{-33\pi}{5};\frac{-13\pi}{5}\right]$

التمرين2

- أنشئ مثلثا ABC متساوي الساقين في الرأس A حيث $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv-\frac{2\pi}{5}\ [2\pi]$

- حدد بالرديان قياس كل من الزوايا $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)$ و $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AC}\right)$ و $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{AC}\right)$

التمرين3

على الدائرة المثلثية نعتبر $A\left(\frac{-\pi}{3}\right)$. أعط القياس الرئيسي للزاوية $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM})$ في كل من الحالتين

a) M أفصول منحني لنقطة $\frac{27\pi}{2}$

b) $(\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OM})\equiv\frac{23\pi}{8}\ [2\pi]$

التمرين4

حدد النسب المثلثية للأعداد $\cos\frac{7}{6}\pi$; $\tan-\frac{73\pi}{3}$; $\sin\frac{15\pi}{4}$; $\sin\frac{-23\pi}{3}$

التمرين5

ليكن $x\in\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$. نضع $A=\frac{\tan x-1}{\tan^2 x+1}$

1- بين أن $A=\cos x\sin x-\cos^2 x$

2- إذا علمت أن $\sin x=\frac{4}{5}$ فأحسب A

3- إذا علمت أن $A=0$ فاحسب x

التمرين6

إذا علمت أن $\sin\frac{7\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

أحسب $\cos\frac{7}{8}$; $\tan\frac{7\pi}{8}$; $\sin\frac{\pi}{8}$; $\sin\frac{3\pi}{8}$

$\cos\frac{327\pi}{8}$; $\tan\frac{-78\pi}{8}$; $\sin\frac{-25\pi}{8}$

التمرين7

بسط

$$A=\cos^6 x+\sin^6 x+3\cos^2 x\cdot\sin^2 x$$

$$B=(1+\sin x+\cos x)^2-2(1+\sin x)(1+\cos x)$$

$$C=2\left(\cos^6 x+\sin^6 x\right)-3\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)$$

التمرين8

1- أحسب $\tan\frac{\pi}{5}+\tan\frac{2\pi}{5}+\tan\frac{3\pi}{5}+\tan\frac{4}{5}$ π

2- ليكن $x\in\mathbb{R}$

بسط $\sin(15\pi-x)\cdot\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)\cdot\cos(3\pi-x)$

3- حدد

$$A=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7}{8}$$

$$B=1+\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}+.....+\sin\frac{13}{7}$$ π

التمرين9

ليكن $x\in\mathbb{R}$.

نعتبر $A=\cos^4 x+\sin^4 x-(\sin x\cos x)(\cos x-\sin x)^2$

1- بين أن $A=1-\sin x\cdot\cos x$

2- علما أن $\sin\frac{11\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ أحسب A من أجل $x=\frac{11\pi}{12}$

التمرين10

نضع $P(x)=\cos^6 x+\sin^6 x-\frac{1}{4}$ حيث $x\in\mathbb{R}$

1- بين أن $P(x)=\frac{3}{4}\left(2\cos^2 x-1\right)^2$

2- أكتب $P(x)$ بدلالة $\tan x$ حيث $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

3- علما أن $\tan x=-\sqrt{2}$ أحسب $P(x)$ و $\cos x$.