أدرس تغيرات f حيث $f(x)=\frac{-2x+3}{x-1}$

تمرين

أدرس تغيرات f حيث $f(x)=x^3-3x$

حدد مطاريف الدالة f

تمارين و حلول

تمرين1

نعتبر f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة بـ: $f(x)=x|x|-4x$

1 – أدرس زوجية الدالة f

2 – أ) بين أن لكل عنصرين مختلفين x و y من $[0;+\infty[$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=x+y-4$$

ب) حدد رتابة f على كل من $[0;2[$ و $]2;+\infty[$ و استنتج رتابة f على كل من $]-2;0]$ و $]-\infty;-2[$

ج) اعط جدول تغيرات الدالة f

3- حدد مطاريف الدالة f إن وجدت

4- حدد تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم (D) ذا المعادلة $y=-2x$

$f(x)=x|x|-4x$

1 – ندرس زوجية الدالة f

لدينا $D_f=\mathbb{R}$

لكل x من $\mathbb{R}$: $-x\in\mathbb{R}$

$f(-x)=-x|-x|+4x=-(x|x|-4x)=-f(x)$

إذن f دالة فردية

2 – أ) نبين أن لكل عنصرين مختلفين x و y من $[0;+\infty[$: $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=x+y-4$

لدينا لكل x من $[0;+\infty[$: $f(x)=x^2-4x$

ليكن x و y من $[0;+\infty[$ حيث $x\neq y$:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(y)}{x-y}&=\frac{x^2-4x-y^2+4y}{x-y}\\&=\frac{(x-y)(x+y)-4(x-y)}{x-y}\\&=\frac{(x-y)(x+y-4)}{x-y}\\&=x+y-4\end{aligned}$$

ب) نحدد رتابة f على كل من $[0;2[$ و $]2;+\infty[$ و نستنتج رتابة f على كل من $]-2;0]$ و $]-\infty;-2[$

* ليكن x و y من $[0;2[$ حيث $x\neq y$ ومنه $0\le x\prec 2$ و $0\le y\prec 2$

و بالتالي $0\le x+y\prec 4$ أي $-4\le x+y-4\prec 0$

ومنه $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \prec 0$

إذن f تناقصية قطعا على $[0;2[$ و حيث أن f فردية فان f تناقصية قطعا على $]-2;0]$

* ليكن x و y من $]2;+\infty[$ حيث $x \neq y$ ومنه $x \succ 2$ و $y \succ 2$

وبالتالي $x+y-4 \succ 0$ أي $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \succ 0$

إذن f تزايدية قطعا على $]2;+\infty[$ ومنه f تزايدية قطعا على $]-\infty;-2[$

ج) جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
f	↗	4	↘ -4	↗

3- نحدد مطاريف الدالة f

بما أن f تزايدية على كل من $]2;+\infty[$ و $]-\infty;-2]$ و تناقصية على $[-2;2]$ فان f تقبل قيمة قصوى عند 2- هي 4 و قيمة دنيا عند 2 هي 4-

4- نحدد تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم (D) ذا المعادلة $y=-2x$

تحديد تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم (D) يرجع إلى حل المعادلة $x|x|-4x=-2x$

$x|x|-4x=-2x$ تكافئ $x|x|-2x=0$

تكافئ $x(|x|-2)=0$

تكافئ $x=0$ أو $|x|=2$

تكافئ $x=0$ أو $x=2$ أو $x=-2$

إذن المنحنى (C_f) و المستقيم (D) يتقاطعان في النقط ذات الأفاصيل 0 و 2 و 2-

تمرين2

نعتبر f دالة عددية معرفة بـ $f(x)=\frac{-x}{x^2-1}$

1- حدد D_f و بين أن f دالة فردية

2- بين أن لكل عنصرين مختلفين a و b من D_f

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{ab+1}{(a^2-1)(b^2-1)}$$

3- حدد منحى تغيرات f على $[0;1[$ و $]1;+\infty[$ و استنتج منحى تغيراتها على $]-1;0]$ و $]-\infty;-1[$

4- أعط جدول تغيرات f

الحل

$$f(x)=\frac{-x}{x^2-1}$$

1- نحدد D_f

-* ليكن $x \in \mathbb{R}$

$x \in D_f$ يكافئ $x^2-1 \neq 0$

تكافئ $x^2 \neq 1$

تكافئ $x \neq 1$ و $x \neq -1$

إذن $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

-* نبين أن f دالة فردية

لكل x من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$: $-x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$

لتكن $x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$

$$f(-x)=\frac{-(-x)}{(-x)^2-1}=-\frac{-x}{x^2-1}=-f(x)$$

إذن f دالة فردية

-2 نبين أن لكل عنصرين مختلفين a و b من D_f $\quad \dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}=\dfrac{ab+1}{(a^2-1)(b^2-1)}$

ليكن a و b من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ حيث $a\neq b$

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{\frac{-a}{a^2-1}-\frac{-b}{b^2-1}}{a-b}=\frac{-a(b^2-1)+b(a^2-1)}{(a^2-1)(b^2-1)}\times\frac{1}{a-b}$$

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{-ab^2+a+ba^2-b}{(a^2-1)(b^2-1)(a-b)}=\frac{ab(a-b)+a-b}{(a^2-1)(b^2-1)(a-b)}$$

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{(a-b)(ab+1)}{(a^2-1)(b^2-1)(a-b)}=\frac{ab+1}{(a^2-1)(b^2-1)}$$

-3 نحدد منحى تغيرات f على $[0;1[$ و $]1;+\infty[$ و نستنتج منحى تغيراتها على $]-1;0]$ و $]-\infty;-1[$

لدينا لكل عنصرين مختلفين a و b من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ $\quad \dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}=\dfrac{ab+1}{(a^2-1)(b^2-1)}$

ليكن a و b من $[0;1[$

ومنه $0\le b\prec 1$; $0\le a\prec 1$ و بالتالي $0\le b^2\prec 1$ et $0\le a^2\prec 1$ et $0\le ab\prec 1$

ومنه $-1\le b^2-1\prec 0$ et $-1\le a^2-1\prec 0$ et $1\le ab+1\prec 2$

إذن $\dfrac{ab+1}{(a^2-1)(b^2-1)}\succ 0$ ومنه f تزايدية على $[0;1[$

و حيث أن f فردية فان f تزايدية على $]-1;0]$

ليكن a و b من $]1;+\infty[$

ومنه $b\succ 1$; $a\succ 1$ و بالتالي $b^2\succ 1$ et $0\le a^2\succ 1$ et $ab\succ 1$

ومنه $b^2-1\succ 0$ et $a^2-1\succ 0$ et $ab+1\succ 2$

إذن $\dfrac{ab+1}{(a^2-1)(b^2-1)}\succ 0$ ومنه f تزايدية على $]1;+\infty[$

و حيث أن f فردية فان f تزايدية على $]-\infty;-1[$

-4 جدول تغيرات f

x	$-\infty$ -1	0	1 $+\infty$
f	↗	↗	↗

تمرين1

نعتبر f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة بـ: $f(x)=x|x|-4x$

1 – أدرس زوجية الدالة f

2 – أ) بين أن لكل عنصرين مختلفين x و y من $[0;+\infty[$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=x+y-4$$

ب) حدد رتابة f على كل من $[0;2[$ و $]2;+\infty[$ و استنتج رتابة f على كل من $]-2;0]$ و $]-\infty;-2[$

ج) اعط جدول تغيرات الدالة f

3- حدد مطاريف الدالة f إن وجدت

4- حدد تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم (D) ذا المعادلة $y=-2x$

$f(x)=x|x|-4x$

1 – ندرس زوجية الدالة f

لدينا $D_f=\mathbb{R}$

لكل x من $\mathbb{R}$: $-x\in\mathbb{R}$

$f(-x)=-x|-x|+4x=-(x|x|-4x)=-f(x)$

إذن f دالة فردية

2 – أ) نبين أن لكل عنصرين مختلفين x و y من $[0;+\infty[$: $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=x+y-4$

لدينا لكل x من $[0;+\infty[$: $f(x)=x^2-4x$

ليكن x و y من $[0;+\infty[$ حيث $x\neq y$:

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{x^2-4x-y^2+4y}{x-y}$$
$$=\frac{(x-y)(x+y)-4(x-y)}{x-y}$$
$$=\frac{(x-y)(x+y-4)}{x-y}$$
$$=x+y-4$$

ب) نحدد رتابة f على كل من $[0;2[$ و $]2;+\infty[$ و نستنتج رتابة f على كل من $]-2;0]$ و $]-\infty;-2[$

* ليكن x و y من $[0;2[$ حيث $x\neq y$ ومنه $0\leq x\prec 2$ و $0\leq y\prec 2$

و بالتالي $0\leq x+y\prec 4$ أي $-4\leq x+y-4\prec 0$

ومنه $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\prec 0$

إذن f تناقصية قطعا على $[0;2[$ و حيث أن f فردية فان f تناقصية قطعا على $]-2;0]$

* ليكن x و y من $]2;+\infty[$ حيث $x\neq y$ ومنه $x\succ 2$ و $y\succ 2$

وبالتالي $x+y-4\succ 0$ أي $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\succ 0$

إذن f تزايدية قطعا على $]2;+\infty[$ ومنه f تزايدية قطعا على $]-\infty;-2[$

ج) جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$ -2 2 $+\infty$
f	↗ 4 ↘ -4 ↗

3- نحدد مطاريف الدالة f

بما أن f تزايدية على كل من $]2;+\infty[$ و $]-\infty;-2]$ و تناقصية على $[-2;2]$ فان f تقبل قيمة قصوى عند -2 هي 4 و قيمة دنيا عند 2 هي -4

4- نحدد تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم (D) ذا المعادلة $y=-2x$

تحديد تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم (D) يرجع إلى حل المعادلة $x|x|-4x=-2x$

$x|x|-4x=-2x$ تكافئ $x|x|-2x=0$

تكافئ $x(|x|-2)=0$

تكافئ $x=0$ أو $|x|=2$

تكافئ $x=0$ أو $x=2$ أو $x=-2$

إذن المنحنى (C_f) و المستقيم (D) يتقاطعان في النقط ذات الأفاصيل 0 و 2 و -2

تمرين2

نعتبر f دالة عددية معرفة بـ $f(x)=\dfrac{-x}{x^2-1}$

1- حدد D_f و بين أن f دالة فردية

2- بين أن لكل عنصرين مختلفين a و b من D_f

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{ab+1}{(a^2-1)(b^2-1)}$$

3- حدد منحى تغيرات f على $[0;1[$ و $]1;+\infty[$ و استنتج منحى تغيراتها على $]-1;0]$ و $]-\infty;-1[$

4- أعط جدول تغيرات f

الحل

$$f(x)=\frac{-x}{x^2-1}$$

1- نحدد D_f

*- ليكن $x\in\mathbb{R}$

$x\in D_f$ يكافئ $x^2-1\neq 0$

تكافئ $x^2\neq 1$

تكافئ $x\neq 1$ و $x\neq -1$

إذن $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

*- نبين أن f دالة فردية

لكل x من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$: $-x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$

لتكن $x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$

$$f(-x)=\frac{-(-x)}{(-x)^2-1}=-\frac{-x}{x^2-1}=-f(x)$$

إذن f دالة فردية

-1 نبين أن لكل عنصرين مختلفين a و b من D_f $\quad \dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}=\dfrac{ab+1}{(a^2-1)(b^2-1)}$

ليكن a و b من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ حيث $a\neq b$

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{\frac{-a}{a^2-1}-\frac{-b}{b^2-1}}{a-b}=\frac{-a(b^2-1)+b(a^2-1)}{(a^2-1)(b^2-1)}\times\frac{1}{a-b}$$

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{-ab^2+a+ba^2-b}{(a^2-1)(b^2-1)(a-b)}=\frac{ab(a-b)+a-b}{(a^2-1)(b^2-1)(a-b)}$$

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{(a-b)(ab+1)}{(a^2-1)(b^2-1)(a-b)}=\frac{ab+1}{(a^2-1)(b^2-1)}$$

-2 نحدد منحى تغيرات f على $[0;1[$ و $]1;+\infty[$ و نستنتج منحى تغيراتها على $]-1;0]$ و $]-\infty;-1[$

لدينا لكل عنصرين مختلفين a و b من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ $\quad \dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}=\dfrac{ab+1}{(a^2-1)(b^2-1)}$

ليكن a و b من $[0;1[$

ومنه $0\leq b\prec 1\ ;\ 0\leq a\prec 1$ و بالتالي $0\leq b^2\prec 1\quad et\quad 0\leq a^2\prec 1\quad et\quad 0\leq ab\prec 1$

ومنه $-1\leq b^2-1\prec 0\quad et\quad -1\leq a^2-1\prec 0\quad et\quad 1\leq ab+1\prec 2$

إذن $\dfrac{ab+1}{(a^2-1)(b^2-1)}\succ 0$ ومنه f تزايدية على $[0;1[$

و حيث أن f فردية فان f تزايدية على $]-1;0]$

ليكن a و b من $]1;+\infty[$

ومنه $b\succ 1\ ;\ a\succ 1$ و بالتالي $b^2\succ 1\quad et\quad 0\leq a^2\succ 1\quad et\quad ab\succ 1$

ومنه $b^2-1\succ 0\quad et\quad a^2-1\succ 0\quad et\quad ab+1\succ 2$

إذن $\dfrac{ab+1}{(a^2-1)(b^2-1)}\succ 0$ ومنه f تزايدية على $]1;+\infty[$

و حيث أن f فردية فان f تزايدية على $]-\infty;-1[$

-3 جدول تغيرات f

x	$-\infty$ -1	0 1	$+\infty$
f	↗	↗	↗

تمرين1

حدد مجموعة تعريف الدالة f في الحالات التالية

$(a$ $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+3}$; $(b$ $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x-1}$

$(c$ $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$ $(d$ $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$

$(e$ $\begin{cases} f(x)=\sqrt{1-x} & x\geq -1 \\ f(x)=\dfrac{1}{x+1} & x\prec -1 \end{cases}$

تمرين2

مثل مبيانيا الدوال f و g و h حيث

$f(x)=-3x+6$; $g(x)=|2x+1|$

$\begin{cases} h(x)=-2 & x\geq 1 \\ h(x)=-x-1 & x\prec 1 \end{cases}$

تمرين 3

أدرس زوجية الدالة f في الحالات التالية

$(a$ $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3}$; $(b$ $f(x)=\dfrac{x^3}{|x|-1}$

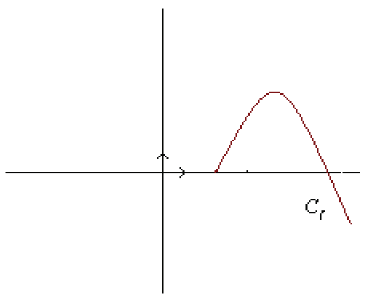
$(c$ $f(x)=x^2-2x$; $(d$ $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

$(e$ $f(x)=|x+2|-|x-2|$

$(g$ $\begin{cases} f(x)=2x+1 & x\geq 0 \\ f(x)=-2x+1 & x\prec 0 \end{cases}$

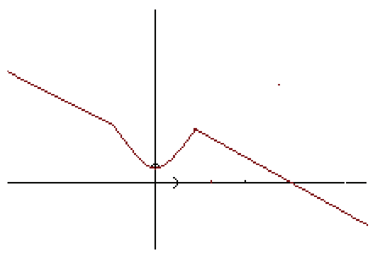
تمرين4

1- أتمم المنحنى C_f في الحالتين



أ- f دالة زوجية
ب- f دالة فردية

2- f دالة عددية منحناها كما يلي



هل f زوجية

تمرين5

نعتبر f دالة عددية معرفة بـ $f(x)=\dfrac{x^2+|x|}{|x|}$

1- حدد D_f و بين أن f دالة زوجية

2- أنشئ المنحنى C_f في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

تمرين6

نعتبر f دالة عددية معرفة بـ $f(x)=x^2-4x+5$

1- أدرس رتابة f على كل من $]2;+\infty[$; $]-\infty;2]$ و أعط جدول تغيراتها

2- حدد تقاطع C_f و محور الأفاصيل

3- حدد تقاطع C_f و المستقيم ذا المعادلة $y=x+1$

تمرين7

نعتبر f دالة عددية معرفة بـ $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-3}$

أدرس تغيرات f

تمرين8

نعتبر f دالة عددية معرفة بـ $f(x)=\dfrac{-1}{x^2+1}$

1- أدرس زوجية f

2- بين أن لكل عنصرين مختلفين a و b من $\mathbb{R}$ $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}=\dfrac{a+b}{(a^2+1)(b^2+1)}$

3- حدد منحى تغيرات f على $[0;+\infty[$ و استنتج منحى تغيراتها على $]-\infty;0]$

4- أعط جدول تغيرات f و حدد قيمة قصوى للدالة f

تمرين9

نعتبر f دالة عددية معرفة بـ $f(x)=x^3-3x$

1- أدرس زوجية f

2- أدرس منحى تغيرات f على $[0;1]$ و على $[1;+\infty[$ و أعط جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$

3- استنتج مطاريف الدالة f

تمرين10

نعتبر f دالة عددية معرفة بـ $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$

1- حدد D_f و أدرس زوجية f

2- أدرس رتابة f على كل من $[0;2[$ و $]2;+\infty[$ و أعط جدول تغيرات f على D_f

3- استنتج مطاريف الدالة f إن وجدت

تمرين11

نعتبر $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2}$

1- حدد D_f ، حل المعادلة $f(x)=1$

2- بين أن لكل x من $\mathbb{R}_+^*$ $f(x)\leq 1$ استنتج مطرافا لـ f

تمرين12

نعتبر f دالة عددية معرفة بـ $f(x)=\dfrac{-x}{x^2-1}$

1- حدد D_f و بين أن f دالة فردية

2- بين أن لكل عنصرين مختلفين a و b من D_f $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}=\dfrac{ab+1}{(a^2-1)(b^2-1)}$

3- حدد منحى تغيرات f على $[0;1[$ و $]1;+\infty[$ و استنتج منحى تغيراتها على $]-1;0]$ و $]-\infty;-1[$

4- أعط جدول تغيرات f

تمرين13

نعتبر f دالة عددية معرفة بـ $f(x)=\dfrac{x^2}{|x|-1}$

1- D_f و بين أن f دالة زوجية

2- بين أن لكل عنصرين مختلفين x و y من $\mathbb{R}^+-\{1\}$ $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=\dfrac{(x-1)(y-1)-1}{(x-1)(y-1)}$

3- حدد رتابة f على $[0;1[$ و $]1;2]$ و $[2;+\infty[$

4- أعط جدول تغيرات f على D_f

استنتج مطاريف f إن وجدت

تمرين 14

نعتبر f دالة عددية معرفة بـ $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x}$

1- بين أن f فردية

2- أثبت لكل x و y من $\mathbb{R}^*$ حيث $x\neq y$ لدينا $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=\dfrac{xy-2}{xy}$

3- أ- أدرس رتابة f على كل من $]0;\sqrt{2}]$; $[\sqrt{2};+\infty[$

ب- أعط جدول تغيرات على $\mathbb{R}^*$

د- استنتج مطاريف الدالة f إن وجدت.

تمرين15

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة بـ

$$\begin{cases} f(x)=x^2-4x & x\geq 0 \\ f(x)=\dfrac{x}{x-2} & x\prec 0 \end{cases}$$

1- أحسب $f(2)$; $f\left(\dfrac{-1}{2}\right)$; $f\left(\dfrac{-3}{2}\right)$

2- أدرس رتابة على كل من $[0;2]$ و $[2;+\infty[$ و $]-\infty;0[$

3- أ- أعط جدول تغيرات f

ب- استنتج مطاريف f إن وجدت